

Uniwersytet Śląski w Katowicach  
Wydział Matematyki Fizyki i Chemii  
Instytut Fizyki

Sebastian Zając  
NR. ALBUMU 221989

Praca magisterska

Wybrane topologiczne i geometryczne metody w  
klasycznej i kwantowej teorii pola

Promotor  
dr Jerzy Król

Rybnik, 21 września 2007

Wyrażam zgodę na udostępnienie mojej pracy magisterskiej dla celów naukowo-badawczych.

DATA .....

PODPIS AUTORA .....

Słowa kluczowe: teorie Yanaga-Millsa, instantony, topologiczne kwantowe teorie pola

### **Oświadczenie autora pracy**

Świadomy odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora pracy

## *Podziękowania*

Pragnę w szczególny sposób podziękować mojemu promotorowi Panu doktorowi Jerzemu Królowi, za cenne uwagi oraz niezliczone długie dyskusje, które wpłynęły na ostateczny kształt tej pracy, a przede wszystkim ukształtowały moje rozumienie Fizyki.

Chciałbym również podziękować doktorowi Jackowi Sysce, oraz doktorowi Markowi Biesiadzie za liczne rozmowy i szczególną pomoc w rozwijaniu wiedzy o fizyce i rzeczywistości.

*Dla Dorotki*

# Spis treści

<b>Wstęp</b>	<b>2</b>
<b>1 Formalizm wiązek włóknistych ...</b>	<b>4</b>
1.1 Sformułowanie Modelu Standardowego w języku wiązek włóknistych . . . .	4
1.1.1 Wiązki włókniste . . . . .	5
1.1.2 Teorie Yanga–Millsa . . . . .	14
1.1.3 Model Standardowy . . . . .	18
1.2 Teoria Cherna – Simonsa . . . . .	22
1.2.1 Klasy Cherna . . . . .	22
1.2.2 Formy Cherna - Simonsa . . . . .	27
1.2.3 Instanton SU(2) . . . . .	29
<b>2 Topologiczne Kwantowe Teorie Pola</b>	<b>37</b>
2.1 Definicja TQFT . . . . .	38
2.2 Formalizm teorii kategorii w TQFT . . . . .	42
2.2.1 Pewne własności TQFT jako funktora z nCob do Hilb . . . . .	45
2.2.2 Interpretacja fizyczna . . . . .	47
<b>3 Przykłady TQFT w 3-ch i 4-ch wymiarach</b>	<b>49</b>
3.1 Teoria Cherna–Simonsa a niezmienniki węzłów . . . . .	49
3.2 Topologiczny "TWIST" w supersymetrycznych teoriach Yanga – Millsa . .	52
<b>Zakończenie</b>	<b>54</b>
<b>4 Uzupełnienia</b>	<b>55</b>
4.1 Formy różniczkowe, teorie Yanga–Millsa, instantony . . . . .	55
4.2 Podstawowe definicje teorii kategorii . . . . .	64

## Wstęp

Model Standardowy cząstek elementarnych (MS) jest niezwykle skutecznym, precyzyjnym i pozwalającym na poprawne przewidywanie wyników doświadczeń modelem oddziaływujących cząstek i pól. Dzięki niemu trzy spośród czterech sił natury (elektromagnetyzm, słabe i silne oddziaływania) są wyjaśnione i precyzyjnie opisane. Dynamiczną strukturą modelu jest działanie Yanga–Millsa, zbudowane na przypuszczeniu, że natura (a przynajmniej fizyka) powinna być niezmiennicza ze względu na grupę przekształceń działającą niezależnie w każdym punkcie czasoprzestrzeni. Tym właśnie jest lokalna symetria cechowania (symetria gauge). Symetria gauge wyznacza niemalże jednoznacznie typy sprzężeń pomiędzy wszystkimi polami opisującymi podstawowe składniki materii i nośniki oddziaływań.

Model Standardowy cząstek elementarnych może być sformułowany w języku geometrycznym różniczkowych, koneksji czy stowarzyszonych wiązek wektorowych (Rozdział 1). Teorie Yanga–Millsa (YM) są w naturalny sposób opisywane takimi obiektami. Sformułowanie na wiązkach pozwala, poza użyciem potężnego aparatu geometrii różniczkowej, odnieść się do metod topologicznych. Dzięki temu możemy zrozumieć i opisać coraz to większy zakres samego modelu standardowego oraz jego różnych rozszerzeń. Model standardowy jest sformułowany na płaskiej 4-ro wymiarowej różniczkowości Lorentza. Rozpoznanie elementów modelu, które mogą być rozszerzone na zakrzywione różniczkowości Lorentza czy Riemanna oraz wskazanie elementów niezależnych od metryki okazuje się niezwykle istotne przy opisie niezaburzeniowych efektów, np. w chromodynamice kwantowej (QCD), czy przy próbie jednolitego opisu modelu standardowego i teorii grawitacji Einsteina. Człony topologiczne (niezależne od metryki bazowej różniczkowości) pojawiają się w naturalny sposób w funkcjach Lagranża teorii YM. Pewne przykłady użycia metod topologicznych możemy zauważyć chociażby w QCD, gdzie stosowanie rachunku zaburzeń (podstawowej metody obliczeniowej modelu standardowego) jest niemożliwe przy niskich energiach. Dyskusję pewnych zagadnień tej tematyki przedstawiono na przykładzie monopola Diraca (1.2) oraz rozwiązań instantonowych (1.2.3). Ponadto w rozdziale 2 przedstawiono tzw. topologiczne kwantowe teorie pola, wykorzystując do tego celu pewne elementy teorii kategorii (uzupełnienia 4.2). Zamierzeniem tej pracy jest dyskusja pewnych aspektów niezwykle bogatego, ciekawego i wszechstronnie wykorzystywanego przenikania się topologicznych i geometrycznych obszarów we współczesnej (kwantowej) teorii pola. Dotyczy ona, rzecz jasna, jedynie wybranych aspektów i ma być elementarna. Nie jest to łatwe zadanie gdyż literatura przedmiotu dostarcza bardzo zaawansowanych analiz tych zagadnień. Samo rozumienie topologicznej niezmienniczości w kontekście kwantowej teorii pola nie jest jednoznaczne (np. niezmienniczość w sensie Schwarza lub Wittena).

Pogranicze topologicznych i geometrycznych metod w teoriach YM to obszar, w którym dokonano zdumiewających odkryć teoretycznych, gdzie czysto matematyczne niezmienniki topologiczne 4-ro różniczkowości, tzw. niezmienniki Donaldsona, zostały uzyskane jako funkcje korelacji pewnych supersymetrycznych 4-ro wymiarowych teorii z cechowaniem. To tutaj również rozpoznano i opisano tzw. dualności Seiberga–Wittena.

Odkrycia te umożliwiły analityczne opisanie efektu uwięzienia kwarków. Mimo braku doświadczalnego potwierdzenia występującej w tych teoriach supersymetrii, otrzymane wyniki analityczne są bardzo ciekawe i wartościowe fenomenologicznie. Nietechniczną dyskusję tych zagadnień przedstawiam w Rozdziale 3. Wyniki te są zaliczane do fundamentalnych osiągnięć fizyki teoretycznej XX wieku i są szczególnie istotne dla tematu tej pracy. Ich pełne zrozumienie czy przedstawienie wymaga biegłego posługiwania się formalizmem supersymetrii i kwantowej teorii pola, co jeszcze nie jest w pełni dane autorowi. Jednakże, przystępna prezentacja tych wyników jest możliwa i powinna znaleźć się w tej pracy.

# Rozdział 1

## Formalizm wiązek włóknistych: geometryzacja modelu standardowego i topologiczne teorie Cherna–Simonsa

### 1.1 Sformułowanie Modelu Standardowego w języku wiązek włóknistych

W rozdziale tym omówię sformułowanie klasycznej teorii pola z symetrią cechowania (abelową i nieabelową) w języku wiązek włóknistych i form różniczkowych. Sformułowanie to umożliwia zastosowanie takich matematycznych narzędzi, jak grupy i klasy homologii (i kohomologii) do nietrywialnych topologicznie przestrzeni i konfiguracji pól w tych przestrzeniach. Jedną z zalet tego formalizmu jest możliwość wykonywania rachunków bez wypisywania wielu indeksów, czy fakt, że teoria w języku form jawnie nie zależy od wyboru układu odniesienia.

Wyrażenie "transformacja cechowania", (ang. gauge transformation) zostało wprowadzone przez H. Weyl'a w 1918 roku przy próbie unifikacji klasycznej teorii elektromagnetyzmu i grawitacji (dwie teorie oddziaływań daleko zasięgowych). Formalizm teorii z polami cechowania (ang. gauge theory) pozwala na zunifikowanie trzech spośród czterech znanych oddziaływań. I tak np. model Salama–Weinberga unifikuje teorie elektromagnetyzmu z oddziaływaniami słabymi. Model ten bazuje na dwóch kluczowych koncepcjach: nieabelowym polu cechowania oraz na spontanicznym łamaniu symetrii. W oparciu o te koncepcje konstruuje się model standardowy unifikujący oddziaływania silne, słabe oraz elektromagnetyczne.



Historycznie pierwszą teorią z abelową symetrią cechowania była elektrodynamika Maxwella. Równania Maxwella (po wprowadzeniu potencjałów) zawierają nie tylko symetrię Lorentza, ale również symetrię cechowania. Ta ważna własność równań Maxwella, początkowo czysto matematyczna, okazuje się w pełni fizyczną i istotną cechą elektrodynamiki. Symetria cechowania elektrodynamiki wyraża się przez abelową grupę  $U(1)$  i, co ważne, symetria ta jest lokalna: w różnych punktach czasoprzestrzeni dopuszczamy różne fazy a ich zależność od punktów jest odpowiednio gładka. Biorąc pewne reprezentacje tej zależności (w postaci pola na rozmaitości) otrzymujemy klasyczne pole cechowania na płaskiej czasoprzestrzeni Lorentza. Teorie opisujące oddziaływania w przyrodzie, które przenoszone są poprzez pola cechowania nazywamy **teoriami Yanga–Millsa**. Nazwa ta jest synonimem teorii z cechowaniem. Pola te mogą być również obdarzone spinem i masą i podlegają kwantowaniu tak jak inne pola materii.

Można by przypuszczać, że użycie formalizmu wiązek jest niepotrzebne do sformułowania i wykonywania obliczeń w ramach modelu standardowego, jednakże, moim zdaniem, pozwala on lepiej zrozumieć idee teorii z cechowaniem i dostarcza ich naturalnej geometrycznej reprezentacji, dzięki której stają się dostępne pewne nowe cechy teorii Yanga–Millsa. Dzięki temu sformułowaniu przybliżamy się nieco do sformułowania ogólnej teorii względności (OTW) będącej geometryczną teorią grawitacji. Zbliżyliśmy się zatem do możliwości geometryzacji wszystkich oddziaływań.

### 1.1.1 Wiązki włókniste

Pod pojęciem **wiązki nad  $M$**  będziemy rozumieli strukturę  $(E, M, \pi)$ , gdzie  $E$  i  $M$  to rozmaitości różniczkowe,  $E$  nazywamy **przestrzenią totalną wiązki**, rozmaitość  $M$  nazywamy **przestrzenią bazową wiązki** natomiast  $\pi$  jest odwzorowaniem  $\pi: E \rightarrow M$  „na” zwanym **projekcją**.

Dla każdego punktu  $p \in M$  przestrzeń  $E_p = \{q \in E: \pi(q) = p\}$  nazywamy **włóknem wiązki** nad punktem  $p$ , tak, że zachodzi

$$\bigcup_{p \in M} E_p = E. \quad (1.1)$$

**Wiązką trywialną** nad  $M$  ze **standardowym włóknem**  $F$  jest iloczyn kartezjański  $E = M \times F$ , wraz z projekcją  $\pi(p, f) = p$ , dla wszystkich  $(p, f) \in M \times F$ . Włóknem nad  $p \in M$  trywialnej wiązki  $E = M \times F$  jest:

$$E_p = \{p\} \times F. \quad (1.2)$$

Rozważmy dwie wiązki  $(E, M, \pi)$  oraz  $(E', M', \pi')$ . **Morfizmem** z pierwszej wiązki do drugiej jest odwzorowanie  $\Psi: E \rightarrow E'$ , wraz z mapą  $\phi: M \rightarrow M'$ , takie, że  $\Psi$  odwzorowuje włókno  $E_p$  we włókno  $E'_{\phi(p)}$ . Morfizm jest **izomorfizmem** wiązek jeżeli  $\Psi$  i  $\phi$  są dyfeomorfizmami.

**Ograniczenie** wiązki  $(E, M, \pi)$  do  $S \subseteq M$  definiujemy jako:

$$E|_S = \{q \in E: \pi(q) \in S\}. \quad (1.3)$$

Wiązka  $(E, M, \pi)$  jest **lokalnie trywialna** ze standardowym włóknem  $F$  jeżeli dla każdego punktu  $p \in M$ , istnieje otoczenie  $U$  punktu  $p$  oraz izomorfizm:

$$\phi: E|_U \rightarrow U \times F \quad (1.4)$$

odwzorujący każde włókno  $E_p$  na włókno  $\{p\} \times F$ . Izomorfizm  $\phi$  nazywamy **lokalną trywializacją** wiązki.

Przykładem wiązki jest **wiązka styczna** na rozmaitości  $M$ . Przestrzenią totalną, oznaczaną  $TM$ , jest suma wszystkich przestrzeni liniowych stycznych do  $M$  we wszystkich punktach  $p \in M$ , czyli:

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M. \quad (1.5)$$

Projekcja  $\pi: TM \rightarrow M$  rzutuje każdy wektor styczny  $v \in T_p M$  na punkt  $p \in M$ . Włóknem nad punktem  $p \in M$  jest przestrzeń liniowa rozpięta nad wektorami stycznymi do  $M$  w  $p$ . Baza tej przestrzeni może być opisana jako pochodne cząstkowe algebry funkcji gładkich nad  $M$  w kierunkach wektorów bazowych rozmaitości  $M$  w lokalnej mapie tej rozmaitości. Zatem wymiar włókna to wymiar rozmaitości  $M$ .

N-wymiarowa **rzeczywista lub zespolona wiązka wektorowa** jest lokalnie trywialną wiązką  $(E, M, \pi)$ , taką że każde włókno  $E_p$  jest n-wymiarową przestrzenią wektorową nad  $\mathbb{R}$  lub  $\mathbb{C}$ . Ponadto dla każdego punktu  $p \in M$  istnieje otoczenie  $U$  punktu  $p$  wraz z lokalną trywializacją:

$$\phi: E|_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^n \quad (1.6)$$

Zatem, wiązka styczna do rozmaitości jest wiązką wektorową (lokalnie trywialną).

**Cięciem** wiązki  $(E, M, \pi)$  nazywamy funkcję  $s: M \rightarrow E$ , która dla każdego punktu  $p \in M$  spełnia:

$$s(p) \in E_p \quad (1.7)$$

Oznacza to, że ciecica przypisują każdemu punktowi przestrzeni bazowej wektor we włóknie nad tym punktem. Jeżeli  $E = M \times F$  jest trywialną wiązką ze standardowym włóknem  $F$ , wtedy ciecice jest po prostu funkcją z  $M$  do  $F$ . Oznacza to, że jeżeli mamy ciecice  $s: M \rightarrow E$ , wtedy istnieje funkcja  $f: M \rightarrow F$  taka, że:

$$s(p) = (p, f(p)) \in E_p \quad (1.8)$$

Przestrzeń wszystkich cięć wiązki  $E$  oznaczamy będziemy przez  $\Gamma(E)$ .

Jeżeli  $E$  jest wiązką wektorową nad  $M$  ciecica wiązki  $E$  spełniają:

$$(s + s')(p) = s(p) + s'(p) \quad (1.9)$$

$$(fs)(p) = f(p)s(p) \quad (1.10)$$

gdzie  $s, s' \in \Gamma(E)$  natomiast  $f \in C^\infty(M)$ .

Dodatkowo mówimy, że cięcia  $e_1, \dots, e_n$  wektorowej wiązki  $E$  tworzą **bazę cięć** na  $E$  jeżeli dowolne cięcie  $s$  może być zapisane jako:

$$s = s^i e_i \quad (1.11)$$

gdzie  $s^i \in C^\infty(M)$ .

**Grupą Liego** nazywamy grupę  $G$  wraz z taką strukturą rozmaitości, dla której działanie grupowe  $\cdot : G \times G \rightarrow G$ , oraz odwzorowanie  $G \ni q \rightarrow q^{-1} \in G$  są odwzorowaniami gładkimi. Warto zauważyć, że odwzorowanie przypisujące elementom grupy Liego ich odwrotności jest dyfeomorfizmem. Przykładami grup Liego są:

- Przestrzeń euklidesowa  $\mathbb{R}^n$  z dodawaniem jest  $n$ -wymiarową grupą Liego o przemiennej algebrze Liego (nawias Liego równy tożsamościowo zero).
- Grupa Liniowa  $GL(n, \mathbb{R})$  rzeczywistych, nieosobliwych macierzy kwadratowych stopnia  $n$  z działaniem mnożenia macierzy (może być ona utożsamiona z podzbiorem otwartym przestrzeni  $\mathbb{R}^{n^2}$ ) jest grupą Liego wymiaru  $n^2$ . Jej algebra  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  składa się z wszystkich macierzy kwadratowych  $n \times n$  z nawiasem Liego  $[X, Y] = XY - YX$ .
- Podgrupy domknięte grupy  $GL(n, \mathbb{R})$ . Np. *Specjalna grupa liniowa*  $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}); \det A = 1\}$  z algebra Liego  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}); \operatorname{tr} A = 0\}$ , *grupa ortogonalna*  $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}); A^{-1} = A^T\}$  i jej składowa spójności  $SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$  z algebra Liego  $\mathfrak{so}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}); A^T = -A\}$ .
- Grupa nieosobliwych macierzy zespolonych stopnia  $n$   $GL(n, \mathbb{C})$  (podzbiór otwarty przestrzeni  $\mathbb{C}^{n^2}$ ) jest grupą Liego zespolonego wymiaru  $n^2$ , z algebra Liego  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  złożoną z wszystkich zespolonych macierzy kwadratowych stopnia  $n$  dla których  $[X, Y] = XY - YX$  (gdzie  $X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ ).
- Podgrupy domknięte grupy  $GL(n, \mathbb{C})$  takie jak: podgrupa  $SL(n, \mathbb{C})$  zespolonych macierzy o wyznaczniku równym 1, podgrupa  $U(1) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}); A^{-1} = A^\dagger\}$  *unitarnych* macierzy z algebra Liego  $\mathfrak{u}(1)$  wszystkich macierzy zespolonych  $X$  dla których  $X^T = -X^*$  i jej podgrupa  $SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$  macierzy specjalnych unitarnych z algebra Liego  $\mathfrak{su}(n)$  wszystkich bezśladowych  $\operatorname{tr} X = 0$  elementów algebry  $\mathfrak{u}(1)$ .

Jeśli włókno  $E_p$ , lokalnie trywialnej wiązki  $E$ , jest grupą Liego  $G$  (a więc jest równocześnie  $n$ -wymiarową rozmaitością różniczkową) i jeśli grupa  $G$  działa na  $E$  swobodnie z prawej strony, tj. istnieje działanie  $R : E \times G \rightarrow E$  zgodne z  $\pi$ , tzn. takie, że  $\pi(p) = \pi(q)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $p \approx q$  ( $p \approx q$  oznacza, że istnieje takie  $g \in G$ , że  $R_g p = q$  a  $R_g$  jest działaniem elementu  $g \in G$  na  $E$ ). Oznacza to, że włókno  $\pi^{-1}(p)$  jest orbitą  $O_p$  punktu  $p$  w działaniu  $R$  grupy  $G$  na  $E$ .

Załóżmy też, że dla lokalnego otoczenia otwartego  $U \subset M$  nad którym wiązka  $(E, M, \pi)$  jest lokalnie trywialna, i dla tej trywializacji (tj.  $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ ,  $\phi(p) = (\pi(p), \psi(p))$ )  $\psi : G \rightarrow F$  jest dyfeomorfizmem włókna  $E_p$  i grupy  $G$ , zachodzi

$$\psi(R_g(p)) = \psi(p)g \quad (1.12)$$

Taką strukturę  $(E, M, \pi, G, R)$  nazywamy **wiązką włóknistą główną nad  $M$  z grupą  $G$**  lub  **$G$ -wiązką główną nad  $M$** .

Z  $G$ -wiązką główną można w naturalny sposób stowarzyszyć lokalnie trywialną wiązkę wektorową.

Niech  $L$  oznacza działanie grupy  $G$  z lewej strony, na pewnej rozmaitości  $F$ , tj.  $L : G \times F \rightarrow F$ . Wtedy można określić działanie grupy  $G$  z prawej strony  $R' : (P \times F) \times G \rightarrow (P \times F)$  na rozmaitości  $P \times F$ , gdzie  $P$  jest przestrzenią totalną  $G$ -wiązki głównej, przez:

$$((e, f), g) \rightarrow (R_g e, L_{g^{-1}} f) \quad (1.13)$$

Weźmy przestrzeń ilorazową  $E = (P \times F)/G$  względem działania  $R'$ . Naturalna projekcja związana z tą przestrzenią ilorazową, to:  $\bar{\pi} : P \times F \rightarrow E$ . Możemy ją złożyć z projekcją wiązki głównej  $\pi : P \rightarrow M$ . Otrzymujemy projekcję  $\pi_E : E \rightarrow M$ . To rzutowanie określa nową wiązkę lokalnie trywialną z przestrzenią totalną  $E$  i włóknem  $F$ . W przypadku, gdy  $F$  jest przestrzenią wektorową  $n$ -wymiarową i grupa  $\{L_g\}$  jest podgrupą grupy automorfizmów  $\text{Aut}(F)$  czyli podgrupą grupy  $GL(n, \mathbb{R})$ , to mówimy, że wiązka wektorowa  $(E, M, \pi_E, F)$  jest wiązką wektorową stowarzyszoną z wiązką główną  $(P, M, \pi, G, R)$ .

### Transformacje cechowania

Mając lokalne trywializacje wiązki wektorowej, tzn. iloczyny kartezjańskie  $U_\alpha \times F$ , gdzie  $U_\alpha$  są lokalnymi mapami bazy  $M$ , możemy z nich „posklejać” wiązkę wektorową  $\pi : E \rightarrow M$  z włóknem  $F$ . Proces ten odbywa się przez określenie tzw. funkcji sklejających lub funkcji przejścia pomiędzy trywializacjami, czyli funkcji o wartościach w grupie  $G$  określonych na podwójnych przecięciach lokalnych map rozmaitości  $M$ , tj.  $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ . Mając zestaw funkcji przejścia możemy jednoznacznie zbudować wiązkę z lokalnych trywializacji, jeśli te funkcje spełniają pewne warunki podane poniżej. Jest to wiązka wektorowa stowarzyszona z pewną  $G$ -wiązką główną.

Tworzymy najpierw rozłączną sumę lokalnych trywializacji:

$$\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} \times F \quad (1.14)$$

i określamy relację równoważności pomiędzy punktami tej sumy, tzn. utożsamiamy punkty  $(p, v)$  i  $(p, v')$  jeśli  $v = \rho(g_{\alpha\beta}(p))v'$ , gdzie  $\rho(g_{\alpha\beta}(p))$  jest pewną reprezentacją grupy  $G$  na przestrzeni wektorowej  $F$  (poprzez tę reprezentację grupa  $G$  działa na włókno  $F$ ). Zwykle zapisujemy to w uproszczony sposób:  $v = g_{\alpha\beta}v'$ . Ponieważ nie chcemy utożsamiać różnych punktów we wiązce globalnie trywialnej więc przyjmujemy:  $g_{\alpha\alpha} = 1 \in G$ . Podobnie powinien zachodzić warunek  $(p, g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha}v) = (p, v)$  czyli:

$$g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1 \in G \text{ na } U_{\alpha} \cap U_{\beta} \cap U_{\gamma} \quad (1.15)$$

oraz  $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1}$ .

Oznaczmy przez  $[p, v]_\alpha$  klasę równoważności punktu  $(p, v)$  względem powyższej relacji utożsamiania punktów w sumie rozłącznej trywializacji. Otrzymujemy w ten sposób przestrzeń totalną  $E$  pewnej lokalnie trywialnej wiązki wektorowej z włóknem  $F$ . Włóknem  $E_p$  nad  $p$  tej wiązki są wszystkie punkty - klasy postaci  $[p, v]_\alpha$ . Rzutowanie jest dane przez  $\pi: E \rightarrow M: \pi[p, v]_\alpha = p$ .

Taką wiązkę nazywamy wektorową  $G$ -wiązką. Grupa  $G$  jest nazywana **grupą cechowania (gauge)** takiej wiązki.

Określimy teraz przekształcenia cechowania i **grupę przekształceń cechowania**  $G$ -wiązki. Często nazwą „grupa cechowania” określa się skrótowo (ale nie zbyt poprawnie) „grupę przekształceń cechowania”.

Można powiedzieć, że przekształcenie cechowania  $G$ -wiązki wektorowej  $\pi: E \rightarrow M$  to funkcja  $f: M \rightarrow \text{End}(E_p)$  o wartościach będących endomorfizmami włókna  $E_p$  ale *ograniczonymi do grupy*  $G$  (mówi się też: endomorfizmy „żyjące” w  $G$ ). Oznacza to, że wybieramy tylko te endomorfizmy włókna  $E_p = F$ , które są następującej postaci:

$$[p, v]_\alpha \rightarrow [p, gv] \quad (1.16)$$

dla pewnego elementu grupy  $g \in G$ . Zależność od punktu  $p \in M$  jest gładka. Można też powiedzieć, że określamy gładką funkcję  $f': M \rightarrow G$  a właściwie o wartościach w reprezentacji  $\rho$  grupy  $G$  na  $F$  (Np. transformacje gauge są związane z lokalnymi przekształceniami cechowania w elektrodynamice  $M \ni x \rightarrow \exp i\alpha(x) \in U(1)$ ).

Zbiór wszystkich przekształceń cechowania tworzy grupę i jest to właśnie **grupa przekształceń cechowania  $G$ -wiązki wektorowej**. Można powiedzieć, że grupa transformacji cechowania to grupa fizycznych lokalnych symetrii gauge, których globalnym odpowiednikiem byłaby globalna symetria względem grupy  $G$ . Natura w przedziwny sposób respektuje symetrię gauge pewnych wiązek włóknistych.

## Koneksja na wiązce

Cięcia wiązki wektorowej przyporządkowują każdemu punktowi przestrzeni bazowej wektor we włóknem nad tym punktem. Jeśli to przyporządkowanie jest gładkie, to mamy (gładkie) pole wektorowe na  $M$ . Jeśli wiązka nie jest trywialna, to nie ma kanonicznego sposobu aby dodać do siebie, czy też odjąć wektory z różnych włókien, zatem trudno jest określić iloraz różnicowy, a co za tym idzie, różniczkowanie pól wektorowych na przestrzeni  $M$ . Jednym ze sposobów różniczkowania cięć wiązek wektorowych jest określenie tzw. **koneksji**, która pozwala m.in. porównać wektory z różnych włókien.

Niech  $E$  będzie wiązką wektorową nad rozmaitością  $M$ . **Koneksja**  $D$  na  $M$  przypisuje każdemu polu wektorowemu  $v$  na  $M$  funkcję  $D_v$  z  $\Gamma(E)$  do  $\Gamma(E)$ , która spełnia następujące własności:

$$D_v(\alpha s) = \alpha D_v s \quad (1.17)$$

$$D_v(s + t) = D_v s + D_v t \quad (1.18)$$

$$D_v(fs) = v(f)s + fD_v s \quad (1.19)$$

$$D_{v+w}s = D_v s + D_w s \quad (1.20)$$

$$D_{fv}s = fD_v s \quad (1.21)$$

gdzie  $v, w \in \text{Vect}(M)$ ,  $s, t \in \Gamma(E)$ ,  $f \in C^\infty(M)$  natomiast  $\alpha$  to skalar. Warto zauważyć, że definicja ta jest podobna do definicji pola wektorowego za sprawą trzeciej własności, czyli prawa Leibniza. Oznacza to, że  $D_v$  działa jak różniczka. Mając dowolne cięcie  $s$  oraz pole wektorowe  $v$ ,  $D_v s$  nazywamy **pochođną kowariantną** cięcia  $s$  w kierunku  $v$ .

Niech  $x^\mu$  będą współrzędnymi otwartego zbioru  $U \subseteq M$ , wtedy  $\partial_\mu$  będzie bazą pola wektorowego w lokalnych współrzędnych. Niech  $e_i$  oznacza bazę cięć wiązki  $E$  nad  $U$ . Możemy wtedy zdefiniować funkcje  $A_{\mu j}^i$  na  $U$  jako:

$$D_\mu e_j = A_{\mu j}^i e_i \quad (1.22)$$

Funkcje  $A_{\mu j}^i$  nazywamy składnikami **potencjału wektorowego**.

Pochodną kowariantną możemy rozpisac jako:

$$D_v s = D_{v^\mu \partial_\mu} (s^i e_i) = v^\mu D_\mu (s^i e_i) = v^\mu ((\partial_\mu s^i) e_i + A_{\mu i}^j s^i e_j) = v^\mu (\partial_\mu s^i + A_{\mu j}^i s^j) e_i \quad (1.23)$$

gdzie w ostatnim kroku dokonano zamiany indeksów  $i$  na  $j$ .

Jeżeli  $D_\mu s = (D_\mu s)^i e_i$  wtedy możemy napisać, że:

$$(D_v s)^i = \partial_\mu s^i + A_{\mu j}^i s^j \quad (1.24)$$

Zobaczymy, jaką interpretację geometryczną ma potencjał wektorowy. Obliczając pochodną kowariantną (1.23) otrzymaliśmy człon w postaci  $A_{\mu i}^j v^\mu s^i e_j$ , który jest nowym cięciem wiązki  $E$  nad  $U$ . Więc działanie potencjału polega na tym, iż pewnemu polu wektorowemu  $v$  oraz cięciu  $s$  (wiązki  $E$ ) przyporządkowuje nowe cięcie wiązki  $E$  nad  $U$ .

Potencjał wektorowy może być traktowany również jako **1-forma o wartościach w  $\text{End}(E)$** , czyli cięcie wiązki  $\text{End}(E|_U) \otimes T^*U$ . Aby się o tym przekonać zdefiniujemy potencjał wektorowy  $A$  jako:

$$A = A_{\mu i}^j e_j \otimes e^i \otimes dx^\mu \quad (1.25)$$

który w działaniu na pole wektorowe  $v$

$$A(v) = A_{\mu i}^j (e_j \otimes e^i) dx^\mu (v) = A_{\mu i}^j v^\mu (e_j \otimes e^i). \quad (1.26)$$

Dodatkowo w działaniu na cięcie  $s$

$$A(v)s = A_{\mu i}^j v^\mu (e_j \otimes e^i)s = A_{\mu i}^j v^\mu s^i e_j \quad (1.27)$$

w wyniku czego otrzymujemy cięcie  $\text{End}(E)$  nad  $U$ .

Pochodną kowariantną możemy zapisać jako:

$$(D_v s)^i = v s^i + (A(v)s)^i \quad (1.28)$$

Możemy pozbyć się wewnętrznych indeksów  $i, j$  stowarzyszonych z bazami cięć tak, aby otrzymać potencjał wektorowy w postaci:

$$A_\mu = A_{\mu i}^j e_j \otimes e^i \quad (1.29)$$

gdzie każda ze składowych jest cięciem  $End(E)$  nad  $U$ .

Załóżmy, że jeśli  $D^0$  jest dowolną koneksją na  $E$ , to możemy utworzyć z niej koneksję  $D = D^0 + A$ , którą możemy zapisać w postaci:

$$D_v s = D_v^0 s + A(v)s . \quad (1.30)$$

Ponadto, załóżmy, że dowolna koneksja  $D$  może być zapisana w postaci  $D = D^0 + A$ . Oznacza to, że wybierając jedną koneksję, możemy wyrazić wszystkie pozostałe jako sumę tej koneksji z pewnym potencjałem wektorowym. Mając lokalną trywializację wiązki  $E$  możemy wyrazić koneksję  $D^0$  w lokalnym układzie współrzędnych poprzez:

$$D_v^0 s = v(s^j) e_j . \quad (1.31)$$

Dzięki czemu dowolną koneksję  $D$  możemy zapisać jako:

$$D_v s = (v(s^i) + A_{\mu j}^i v^\mu s^j) e_i = D_v^0 s + A(v)s \quad (1.32)$$

Koneksję  $D^0$  nazywamy **standardową płaską koneksją** na  $E|_U$ . Zależy ona od wyboru lokalnej trywializacji wiązki  $E$ .

Geometryczne sformułowanie OTW opiera się na wiązce stycznej czasoprzestrzeni. Czasoprzestrzeń posiada metrykę, która pozwala mierzyć długości i iloczyn skalarny wektorów stycznych do dowolnego punktu rozmaitości. Wyróżnionymi koneksjami są te, które zachowują metrykę. Natomiast w teoriach YM rolę przestrzeni wektorowej stycznej pełni wiązka wektorowa stowarzyszona z  $G$ -wiązką główną, której globalne cięcia tworzą grupę cechowania danej teorii. Np. potencjały wektorowe w elektrodynamice to fizyczne koneksje. Ogólnie, koneksje mogą być zdefiniowane przez 1-formy różniczkowe o wartościach w algebrze Liego  $\mathfrak{g}$  (grupy Liego  $G$ ). Te 1-formy odpowiadają 1-formom o wartościach w endomorfizmach włókna będącego przestrzenią wektorową wiązki wektorowej stowarzyszonej z  $G$ -wiązką główną. Aby się o tym przekonać niech  $E$  będzie  $G$ -wiązką ze standardowym włóknem danym przez pewną przestrzeń wektorową  $V$  na której  $G$  ma reprezentację  $q$ . Wtedy możemy zapisać lokalne trywializacje w postaci:

$$\phi_\alpha: E|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times V \quad (1.33)$$

takie, że  $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$  są w postaci  $q(g_{\alpha\beta})$  funkcji  $g_{\alpha\beta}$  o wartościach w grupie  $G$ . Niech  $D$  będzie pewną koneksją na  $E$ . Nad każdym  $U_\alpha$  możemy zapisać koneksję  $D$  jako  $D = D^0 + A$ , gdzie  $A$  jest potencjałem wektorowym. Taką koneksję  $D$  nazywamy  **$G$ -koneksją**, jeżeli w lokalnym układzie współrzędnych  $A_\mu \in End(E)$ .

Tak jak możemy zastosować transformację cechowania do cięć  $G$ -wiązki, tak samo możemy zastosować tę transformację do  $G$ -koneksji. Rozważmy  $G$ -koneksję na wiązce  $E$  i niech  $q \in G$  będzie transformacją cechowania. Możemy zapisać nową  $G$ -koneksję na  $E$  jako:

$$D'_v(s) = q D_v(q^{-1}s) \quad (1.34)$$

gdzie  $v \in Vect(M)$ ,  $s \in \Gamma(M)$ .

Jeżeli  $G$ -koneksja  $D'$  otrzymana jest z  $G$ -koneksji  $D$  poprzez transformację cechowania, mówimy, że  $D$  i  $D'$  są **gauge-równoważne**. W teoriach z cechowaniem, dwie różne koneksje opisują to samo pole fizyczne, jeżeli są koneksjami gauge-równoważnymi. Przestrzeń wszystkich  $G$ -koneksji na  $G$ -wiązce oznaczamy jako  $\mathcal{A}$ , natomiast przez  $\mathcal{A}/\mathcal{G}$  będziemy rozumieli przestrzeń klas równoważności koneksji gauge (ang. connections modulo gauge transformation). Geometria  $\mathcal{A}/\mathcal{G}$  odgrywa kluczową rolę w teoriach z cechowaniem.

### Krzywizna koneksji wiązki

Rozważmy wiązkę wektorową  $E$  nad  $M$  z koneksją  $D$ . Mając dwa pola wektorowe  $v, w \in \text{Vect}(M)$  definiujemy **krzywiznę**  $F$  koneksji  $D$ , jako operator działający na cięciu  $s$  wiązki  $E$  dany przez:

$$F(v, w)s = D_v D_w s - D_w D_v s - D_{[v, w]}s \quad (1.35)$$

Krzywizna koneksji  $D$  jest miarą odstępstwa od sytuacji komutujących pochodnych kowariantnych. W przypadku, gdy mamy standardową koneksję płaską na trywialnej wiązce z włóknem  $V$  (cięcia są zwykłymi funkcjami  $f: M \rightarrow V$ ) otrzymujemy:

$$F(v, w)s = vw f - wv f - [v, w]f = 0 \quad (1.36)$$

Koneksję dla której krzywizna znika ( $F(v, w)s = 0$ ) nazywamy **płaską**.

Operator krzywizny  $F(v, w)$  możemy zapisać jako:

$$F(v, w) = D_v D_w - D_w D_v - D_{[v, w]} = [D_v, D_w] - D_{[v, w]} \quad (1.37)$$

Ma on następujące własności:

- Antysymetryczność

$$F(v, w) = -F(w, v) \quad (1.38)$$

- Liniowość dla  $f \in C^\infty$

$$F(fv, w)s = F(v, fw)s = F(v, w)(fs) = fF(v, w)s \quad (1.39)$$

Wyraźmy krzywiznę w lokalnym układzie współrzędnych  $x^\mu$  na pewnym otwartym zbiorze  $U \subset M$ . Jeśli włóknem wiązki wektorowej jest przestrzeń wektorowa  $\text{End}(E) = E^* \otimes E$  endomorfizmów przestrzeni  $E$ , otrzymujemy wiązkę wektorową lokalnie trywialną  $\text{End}(E)$ . Zdefiniujmy  $F_{\mu\nu}$  jako cięcie  $\text{End}(E)$ :

$$F_{\mu\nu} = F(\partial_\mu, \partial_\nu). \quad (1.40)$$

Korzystając z własności pochodnej  $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$  możemy (1.40) zapisać jako:

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu]. \quad (1.41)$$



Z własności liniowości krzywizny możemy  $F(v, w)$  zapisać jako

$$F(v, w) = v^\mu w^\nu F_{\mu\nu} \quad (1.42)$$

Składniki potencjału wektorowego  $A_{\mu j}^i e_i$  możemy (z (1.22)) wyrazić jako:

$$D_\mu e_j = A_{\mu j}^i e_i \quad (1.43)$$

Pochodną kowariantną (1.24) dowolnego cięcia  $s$  wiązki  $E$  nad  $U$  możemy zapisać w postaci:

$$(D_\nu s)^i = \partial_\nu s^i + A_{\nu j}^i s^j \quad (1.44)$$

Możemy wyrazić krzywiznę poprzez potencjał wektorowy:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} e_i &= D_\mu D_\nu e_i - D_\nu D_\mu e_i = D_\mu (A_{\nu i}^j e_j) - D_\nu (A_{\mu i}^j e_j) = \\ &= (\partial_\mu A_{\nu i}^j) e_j + A_{\mu j}^k A_{\nu i}^j e_k - (\partial_\nu A_{\mu i}^j) e_j - A_{\nu j}^k A_{\mu i}^j e_k = \\ &= \left( (\partial_\mu A_{\nu i}^j) - (\partial_\nu A_{\mu i}^j) + A_{\mu k}^j A_{\nu i}^k - A_{\nu k}^j A_{\mu i}^k \right) e_j \end{aligned} \quad (1.45)$$

Ponieważ cięcia  $e_j \otimes e^i$  tworzą lokalną bazę cięć  $End(E)$  zachodzi:

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu i}^j e_j \otimes e^i \quad (1.46)$$

gdzie  $F_{\mu\nu i}^j$  to zbiór składowych krzywizny, które w jawnej postaci możemy zapisać jako:

$$F_{\mu\nu i}^j = \partial_\mu A_{\nu i}^j - \partial_\nu A_{\mu i}^j + A_{\mu k}^j A_{\nu i}^k - A_{\nu k}^j A_{\mu i}^k \quad (1.47)$$

Pomijając indeksy wewnętrzne krzywiznę możemy wyrazić, w znanej postaci

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \quad (1.48)$$

Tak jak w przypadku potencjału wektorowego  $A$  (1.25), który jest 1-formą o wartościach w  $End(E)$ , możemy rozpatrywać krzywiznę jako 2-formę  $F$  o wartościach w  $End(E)$  jako:

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (1.49)$$

Dzięki czemu otrzymujemy postać nie zależną od wyboru układu współrzędnych, i zdefiniowaną dla dowolnej rozmaitości  $M$ .

### 1.1.2 Teorie Yanga–Millsa

Sformułowanie **teorii Yanga–Millsa** zaczniemy od definicji 1-formy koneksji wiązki  $A$  (potencjału cechowania). Wszędzie gdzie nie prowadzi to do nieporozumień, opuszczamy indeksy wewnętrzne związane z włóknem wiązki  $E$  lub  $End(E)$ . W naszych rozważaniach ważne jest, aby grupa cechowania (wiązki głównej) była zwarta, oraz posiadała skończenie wymiarową i unitarną reprezentację. Gwarantuje nam to, że generatory grupy  $T^a$  będą hermitowskimi i bezśladowymi macierzami  $n \times n$ , które spełniają następującą regułę komutacji:

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c \quad (\text{sumowanie po } c) \quad (1.50)$$

gdzie  $f^{abc}$  to stałe struktury grupy cechowania. W przypadku  $SU(2)$  generatorami  $T^a$  są macierze Pauliego  $\frac{\sigma^a}{2}$ , natomiast  $f^{abc} = \epsilon^{abc}$ .

Generatory te unormowane są do:

$$tr(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}. \quad (1.51)$$

Cofnięcie (ang. “Pull back”) 1-formy koneksji wiązki przez lokalne cięcie nazywamy **potencjałem cechowania**, który w kwantowej teorii pola odpowiada **bozonom cechowania**.

**1-forma koneksji**  $A$  o wartościach w algebrze Liego zbudowana jest z potencjału wektorowego  $A_\mu$  (który jest elementem algebry Liego) i ma postać:

$$A = A_\mu dx^\mu = ig A_\mu^a T^a dx^\mu \quad (\text{sumowanie po } a) \quad (1.52)$$

gdzie  $g$  jest stałą sprzężenia. Pola  $A_\mu^a$  nazywamy *polami Yanga–Millsa* i jest ich tyle ile generatorów grupy (dla grupy  $SU(n)$  ilość generatorów to  $n^2 - 1$ ).

Potencjał cechowania pozwala zdefiniować **pochodną kowariantną**, która geometrycznie wyraża transport równoległy cięć (pól wektorowych) wiązki głównej.

$$\nabla_\mu = D_\mu = d + A \quad (1.53)$$

Wyrażenie to w zapisie wektorowym ma postać:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig A_\mu^a T^a \quad (\text{sumowanie po } a) \quad (1.54)$$

Pola  $A_\mu^a$  gwarantują niezmienniczość pochodnej kowariantnej względem lokalnych transformacji cechowania.

$$\nabla_\mu \rightarrow \nabla'_\mu = U(x) \nabla_\mu. \quad (1.55)$$

gdzie  $U$  jest dowolnym elementem grupy  $SU(n)$ .  $U$  możemy zapisać w postaci:

$$U(x) = e^{ig\alpha^a(x)T^a} \quad (1.56)$$

gdzie  $\alpha$  to parametr obrotu grupy.

Jeśli grupa  $SU(n)$  działa na pole  $\phi(x)$  przez reprezentację wektorową grupy to:

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x)' = U(x)\phi(x) \quad (1.57)$$

Pochodna kowariantna działająca na  $\phi(x)$  ma postać:

$$\nabla_\mu \phi(x) = d\phi(x) + A \wedge \phi(x). \quad (1.58)$$

Z (1.55) otrzymujemy, że transformacja cechowania pola  $A$  wyraża się przez

$$A \rightarrow U(x)AU^{-1}(x) - (dU(x))U^{-1}(x) \quad (1.59)$$

Wartość potencjału  $A$  w danym punkcie zależy od wyboru cechowania, co oznacza, że wartość potencjału cechowania w punkcie nie powinna być obserwowalną wielkością fizyczną.

Cofnięcie tensora krzywizny ma interpretację **pola cechowania**. Tensor  $F$  krzywizny (koneksji  $A$ ) nazywamy **natężeniem pola**. Jest on 2-formą o wartościach w algebrze Liego zdefiniowaną jako:

$$F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu = dA + A \wedge A. \quad (1.60)$$

gdzie

$$F_{\mu\nu} = igF_{\mu\nu}^a T^a = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \quad (1.61)$$

Korzystając z (1.59) łatwo zobaczyć, że 2-forma natężenia transformuje się zgodnie z reprezentacją dołączoną grupy  $G$  na  $F$ :

$$F \rightarrow UFU^{-1} \quad (1.62)$$

Forma lagranżjanu Yanga–Millsa dla  $n=4$  musi być 4-formą zbudowaną z 2-form  $F$ . Pierwszą możliwością jest  $(F \wedge F)$  (tylko dla przypadku 4-wymiarowego). Jednakże

$$F \wedge F = d(A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A) \quad (1.63)$$

prowadzi do różniczki zupełnej, co oznacza, że nie może być wykorzystana do opisu dynamicznego pola. Postać ta odgrywa jednak istotną rolę w klasyfikacji topologicznej rozwiązań, o której powiem więcej w rozdziale dotyczącym teorii Cherna–Simonsa.

Drugą możliwością jest  $F \wedge *F$  (gdzie  $*$  jest tzw. operatorem Hodge'a (4.29)):

$$F \wedge *F = -\frac{g^2}{8}F_{\mu\nu}^a F_a^{\rho\sigma} \epsilon_{\rho\sigma\alpha\beta} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta = \frac{g^2}{2}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \epsilon \quad (1.64)$$

Forma ta jest dopuszczalna dla dowolnego wymiaru. Zatem **lagranżjan Yanga–Millsa**

$$\mathcal{L}_{YM} = \frac{1}{2}tr(F \wedge *F) \quad (1.65)$$

$tr$  jest śladem po indeksach algebry Liego  $\mathfrak{g}$  grupy  $G$ .

Z definicji operatora Hodge'a (4.29) możemy zapisać równanie (1.65) jako:

$$\mathcal{L}_{YM} = \frac{1}{4} \text{tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \text{vol} \quad (1.66)$$

Działanie w teoriach YM jest postaci:

$$\mathcal{S}_{YM}(A) = \frac{1}{2} \int_M \text{tr}(F \wedge *F). \quad (1.67)$$

Zobaczymy jak z zasady wariacyjnej można wyprowadzić równania Yanga–Millsa: Policzmy wariację działania (1.67):

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S}_{YM} &= \frac{1}{2} \int_M \text{tr} \delta(F \wedge *F) = \frac{1}{2} \int_M \text{tr}(\delta F \wedge *F + F \wedge \delta *F) = \\ &= \frac{1}{2} \int_M \text{tr}(\delta F \wedge *F + \delta F \wedge *F) = \int_M \text{tr}(\delta F \wedge *F) = \\ &= \int_M \text{tr}(d_D \delta A \wedge *F) = \int_M \text{tr}(\delta A \wedge d_D *F) = 0 \end{aligned} \quad (1.68)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \delta F &= \frac{d}{ds}(F_0 + dA_s + A_s \wedge A_s) |_{s=0} = d(\delta A) + (\delta A \wedge A_s + A_s \wedge \delta A) = \\ &= d(\delta A) + [A, \delta A] = d_D \delta A \end{aligned} \quad (1.69)$$

Z (1.68) otrzymujemy równanie:

$$d_D *F = d *F + [A, *F] = d *F + A \wedge *F - *F \wedge A = 0, \quad (1.70)$$

które wraz z tożsamością Bianchiego (4.51):

$$d_D F = dF + [A, F] = dF + A \wedge F - F \wedge A = 0 \quad (1.71)$$

tworzą **równania Yanga–Millsa** [1].

Równania te dostarczają opisu dynamiki **tylko** bezmasowych pól cechowania.

## Elektrodynamika

Jeśli grupą struktury wiązki głównej będzie  $U(1)$  to otrzymamy abelową teorię YM, czyli elektrodynamikę. Dla  $U(1)$  występuje tylko jeden generator, natomiast stała sprzężenia  $g$ , jest równa ładunkowi elektrycznemu  $e$ . 1-formę potencjału definiujemy jako:

$$A = A_\mu dx^\mu \quad (1.72)$$

Transformacja cechowania pola  $A$  sprowadza się do postaci:

$$A \rightarrow A + d\alpha. \quad (1.73)$$

Tensor krzywizny  $F$  koneksji  $A$  wyrażał będzie się tylko poprzez pochodną zewnętrzną 1-formy potencjału (gdyż  $U(1)$  jest grupą abelową):

$$dA = \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2}F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (1.74)$$

gdzie  $F$  w jawnej postaci:

$$F = ieE_i dx^0 \wedge dx^i - \frac{ie}{2}\epsilon_{ijk}B_i dx^j \wedge dx^k \quad (1.75)$$

oraz forma dualna:

$$*F = ieB_i dx^0 \wedge dx^i - \frac{ie}{2}\epsilon_{ijk}E_i dx^j \wedge dx^k. \quad (1.76)$$

Pochodna zewnętrzna  $F$  tożsamościowo równa się zero (tożsamość Bianchiego)

$$dF = d dA = 0. \quad (1.77)$$

Korzystając z transformacji cechowania (1.73)

$$\delta F = d \delta A = d \delta \alpha = 0. \quad (1.78)$$

Działanie dla elektrodynamiki klasycznej (korzystając z (1.67))

$$S = \frac{1}{2} \int F \wedge *F. \quad (1.79)$$

Otrzymujemy z niego bez źródlowe równania elektrodynamiki:

$$d * F = 0 \quad (1.80)$$

$$dF = 0 \quad (1.81)$$

Jeśli uwzględnimy ładunki to równanie (1.80) będzie postaci:

$$d * F = *J \quad (1.82)$$

gdzie  $J$  - jednoforma prądu:

$$J = j_\mu dx^\mu, \quad (1.83)$$

która spełnia równanie ciągłości:

$$d * J = 0 \quad (1.84)$$

Geometryczna interpretacja nie tylko ułatwia nam bardzo klarowny zapis dynamicznych równań, ale również umożliwia łatwą ich interpretację. Wybór opisu oddziaływania sprowadza się jedynie do wyboru odpowiedniej grupy cechowania wiązki głównej. Formalizm ten jest podstawą opisu oddziaływań fizycznych, stanowi integralną część modelu standardowego (opisanego w następnym podrozdziale), który opisuje oddziaływanie pól materii poprzez oddziaływanie elektrosłabe oraz silne.

### 1.1.3 Model Standardowy

Nasze poprzednie rozważania dotyczące opisu oddziaływania, chcemy rozszerzyć o opis pól materii. Obecnie najbardziej efektywnym modelem wszystkich znanych oddziaływań (z wyjątkiem grawitacyjnych) jest **Model Standardowy** cząstek elementarnych. Oparty jest on na lokalnej grupie cechowania  $SU(3)_c \times SU(2) \times U(1)_Y$  (gdzie  $Y$  to hiperładunek, natomiast  $c$  oznacza kolor). Klasyfikuje on pola materii **fermiony** (leptony i kwarki) oraz nośniki oddziaływań tych pól - **bozony**. Bozony te to: bozon Higgsa, foton, bozony pośredniczące  $W^\pm, Z^0$ , oraz gluony.

Spróbujemy przedstawić geometryczną interpretację składników modelu standardowego:

- Przestrzeń bazowa to 4-ro wymiarowa płaska przestrzeń Minkowskiego,
- Pola cząstek materii to cięcia wektorowych, zespolonych wiązek  $E$ ,
- Wewnętrzna symetria pól materii odpowiada grupie Liego  $GL(m, \mathbb{C})$ , która jest grupą struktury pewnej wiązki głównej.
- Pole cechowania to 1-forma koneksji o wartościach w algebrze Liego odpowiadającej grupie Liego  $GL(m, \mathbb{C})$ .
- Grupa cechowania  $\mathcal{G}_E$  wiązki wektorowej to grupa cięć globalnych wiązki głównej z grupą struktury  $GL(m, \mathbb{C})$
- Krzywizna  $F$  koneksji  $A$  to 2-forma o wartościach w algebrze Liego grupy  $GL(m, \mathbb{C})$ . Jest ona uogólnieniem tensora natężenia  $F_{\mu\nu}$  pola elektromagnetycznego.

W modelu standardowym pole materii  $\psi$  jest cięciem wiązki wektorowej, stowarzyszonej z wiązką główną z grupą struktury  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . Dopuszczając pola o lokalnej grupie cechowania i mechanizm Higgsa uwzględnia się wszystkie, oprócz grawitacyjnego, oddziaływania pól materii i pól nośników oddziaływań.

Model standardowy tworzą:

Lewoskrętne leptony, które są dubletami grupy  $SU(2)$ , tak jak i lewoskrętne kwarki oraz bozon Higgsa (ich izospin  $I = \frac{1}{2}$ ). Natomiast prawoskrętne leptony i kwarki to singlety  $SU(2)$  (o izospinie  $I = 0$ ). Ze względu na grupę  $SU(3)_c$  kwarki tworzą tryplety, a leptony i pole Higgsa są singletami tej grupy.

Model ten zakłada **3 generacje** leptonów i kwarków. Leptony oznaczane przez  $e^i$  to: **elektron** ( $e^1$ ), **mion** ( $e^2$ ) oraz **taon** ( $e^3$ ), towarzyszą im odpowiednie **neutrino**  $\nu^i$  – elektronowe, mionowe i taonowe. Kwarki  $u^i$  to odpowiednio kwark **górnny**  $u$ , **powabny**  $c$  i **top**  $t$ . Natomiast kwarki  $d^i$  to kwark **dolny**  $d$ , **dziwny**  $s$ , oraz **piękny**  $b$ . Ze względu na **chiralność** pola dzielimy na lewoskrętne i prawoskrętne (odpowiednio indeks dolny  $L$  i  $R$ )

$$\gamma_5 \Psi_R = \Psi_R, \quad \gamma_5 \Psi_L = -\Psi_L \quad (1.85)$$

gdzie  $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$  (w przypadku 4-wymiarów).

Czyli możemy wyrazić składniki modelu standardowego poprzez pola:

1. Leptony:

$$\begin{aligned} L^i &= \begin{pmatrix} \nu_L^i \\ e_L^i \end{pmatrix}, \quad \left( Y = -\frac{1}{2} \right) \\ E^i &= e_R^i, \quad (Y = -1) \end{aligned} \quad (1.86)$$

2. Kwarki:

$$\begin{aligned} Q^{ib} &= \begin{pmatrix} u_L^{ib} \\ d_L^{ib} \end{pmatrix}, \quad \left( Y = \frac{1}{6} \right) \\ U^{ib} &= u_R^{ib}, \quad \left( Y = \frac{2}{3} \right) \\ D^{ib} &= d_R^{ib}, \quad \left( Y = -\frac{1}{3} \right) \end{aligned} \quad (1.87)$$

gdzie  $b$  to indeks fundamentalnej reprezentacji  $SU(3)$ ,  $b = 1, 2, 3$ .

3. Pole Higgsa:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad \left( Y = \frac{1}{2} \right) \quad (1.88)$$

Dodatkowo każdej cząstce przyporządkowana jest jej antycząstka, posiadająca przeciwnie liczby kwantowe.

Nośnikami oddziaływań silnych są gluony. Jest ich tyle ile generatorów grupy  $SU(3)$  czyli  $3^2 - 1 = 8$ . Oddziaływania słabe przenoszone są przez 3 bozony wektorowe  $W^\pm$  oraz  $Z^0$ , bo są 3 generatory grupy  $SU(2)$ . Natomiast oddziaływania elektromagnetyczne przenoszone są przez foton, któremu odpowiada jeden generator grupy  $U(1)$ . Zatem oddziaływaniom tym odpowiadają lokalne grupy symetrii cechowania:

- silnym grupa kolorowa  $SU(3)_c$ ,
- słabym grupa spinowa  $SU(2)$ ,
- elektromagnetycznym grupa fazowa  $U(1)$

4. Bozony cechowania:

$$\begin{aligned} SU(3) &: G_\mu = ig_3 G_\mu^{\bar{a}} T^{\bar{a}} && 8 \text{ gluonów} \\ SU(2) &: W_\mu = ig_2 W_\mu^a T^a && 3 \text{ bozony} \\ U(1) &: B_\mu && 1 \text{ bozon} \end{aligned} \quad (1.89)$$

gdzie  $g_1, g_2, g_3$  to stałe sprzężenia odpowiednio oddziaływań elektromagnetycznych, słabych oraz silnych.

Korzystając z zasady minimalnego działania funkcja Lagranża pozwala otrzymać równania ruchu (równania Eulera–Lagranża) danego układu fizycznego.

W lagranżjanach członami odpowiedzialnymi za opis dynamiki pól cechowania (oddziaływań), są lagranżjany Yanga–Millsa (1.65) z odpowiednią grupą symetrii wiązki głównej. Sprzężenie pól materii z polami Yanga–Millsa otrzymujemy poprzez tzw. **sprzężenie minimalne**, to znaczy poprzez **pochoďną kowariantną** (1.53). Np. pochodna kowariantna uwzględniająca wszystkie oddziaływania ma postać:

$$D_\mu = \partial_\mu + B_\mu + W_\mu + G_\mu \quad (1.90)$$

Lagranżjan modelu standardowego ma postać:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{L}^i \gamma^\mu \left( \partial_\mu - \frac{i}{2} g_1 B_\mu + W_\mu \right) L^i + \bar{E}^i \gamma^\mu (\partial_\mu - i g_1 B_\mu) E^i + \\ & + \bar{Q}^i \gamma^\mu \left( \partial_\mu + \frac{i}{6} g_1 B_\mu + W_\mu + G_\mu \right) Q^i + \bar{U}^i \gamma^\mu \left( \partial_\mu + \frac{2i}{3} g_1 B_\mu + G_\mu \right) U^i + \\ & + \bar{D}^i \gamma^\mu \left( \partial_\mu - \frac{i}{3} g_1 B_\mu + G_\mu \right) D^i + (\bar{L}^i \Phi Y_{ij}^E E_j + \bar{Q}^i \Phi Y_{ij}^D D_j + \bar{Q}^i \epsilon \Phi^* Y_{ij}^U U_j + h.c.) + \\ & - \frac{1}{4} B_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2g_2^2} \text{tr} W_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2g_3^2} \text{tr} G_{\mu\nu}^2 - \left( (\partial + \frac{i}{2} g_1 B_\mu + W_\mu) \Phi \right)^\dagger \left( \partial + \frac{i}{2} g_1 B_\mu + W_\mu \right) \Phi + \\ & - \frac{\lambda}{4} (\Phi^\dagger \Phi - v^2)^2 \end{aligned} \quad (1.91)$$

gdzie

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.92)$$

natomiast macierze  $Y_{ij}$  to macierze  $3 \times 3$  stałych Yukawy:

$$Y_{ij}^E = M_E, \quad Y_{ij}^U = M_U, \quad Y_{ij}^D = K_m^D M_D \quad (1.93)$$

gdzie  $K_m$  to tzw. macierz Cabibbo–Kabayashi–Moskawy - macierz mieszania kwarków, a  $M$  to diagonalne macierze masowe.

Model standardowy zawiera 22 niezależne parametry.

Z doświadczenia wiemy, że pola oddziaływań słabych ( $W^+$ ,  $W^-$ , oraz  $Z$ ) są masowe. Aby uzyskać pola masowe musimy zastosować mechanizm spontanicznego złamania symetrii (tzw. mechanizm Higgsa) w teoriach YM modelu standardowego.

Stosując interpretację geometryczną w przypadku oddziaływującego elektromagnetycznie elektronu  $\psi$  otrzymujemy:

- Pole elektronu to cięcie zespolonej wiązki wektorowej  $\psi$  z włóknem  $\mathbb{C}$ .
- Współczynniki fazowe  $e^{i\alpha(x)}$  tworzą grupę Liego  $U(1)$  - 1 wymiarową unitarną grupę obrotów w płaszczyźnie zespolonej,



- potencjał  $A(x)$  jest 1-formą koneksji  $A$  o wartościach  $i\alpha(x)$  (jednowymiarowej algebrze Liego grupy  $U(1)$  dla każdego  $x \in M$ )
- pochodna kowariantna :

$$\mathcal{D}\psi = d\psi + A\psi, \quad (1.94)$$

- funkcja  $\psi$  transformuje się wg:

$$\psi'(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x) \quad (1.95)$$

Transformacja pola cechowania (fotonu) (1.59) sprowadza się do:

$$A \rightarrow A - d\alpha(x), \quad (1.96)$$

gdyż grupa  $U(1)$  jest abelowa.

- Pole elektromagnetyczne - krzywizna koneksji wynosi

$$F = dA \quad (1.97)$$

Lagranżjan relatywistycznego elektronu (bez oddziaływania) możemy zapisać w postaci:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi = i\bar{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi \quad (1.98)$$

Widać, że lagranżjan ten jest niezmienniczy ze względu na globalną symetrię cechowania  $U(1)$ . Natomiast jeżeli narzucimy warunek lokalnej symetrii  $U(1)$  (1.95) pochodną  $\partial_\mu$  zamienimy na pochodną kowariantną  $D_\mu$  i lagranżjan (1.98) posiadał będzie nowe człony:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \Psi = i\bar{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi - e\bar{\Psi}\gamma^\mu \Psi A_\mu \quad (1.99)$$

gdzie  $\bar{\Psi}\gamma^\mu \Psi A_\mu = j^\mu A_\mu$  to tzw. prąd Diraca.

Całkowity lagranżjan opisujący powyższy przykład będzie postaci:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi - e\bar{\Psi}\gamma^\mu \Psi A_\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1.100)$$

## 1.2 Teoria Cherna – Simonsa

### 1.2.1 Klasy Cherna

Z działania Yanga–Millsa (1.67) otrzymujemy równania YM [1]:

$$d_D * F = 0, \quad (1.101)$$

$$d_D F = 0 \quad (1.102)$$

Działanie YM (1.67) zależy od metryki (poprzez operator Hodge'a (4.29)). Zobaczmy, jak można sformułować teorie YM niezależną od metryki.

Dla wymiaru  $n=2k$  można mówić o samosprężoności  $F : *F = F$ . Wtedy działanie YM przybiera postać:

$$S(A) = \int_M tr(F^k) \quad (1.103)$$

Dla  $n=4$  otrzymujemy:

$$S(A) = \int_M tr(F \wedge F) \quad (1.104)$$

gdzie otrzymujemy jawną niezależność od metryki.

Rozwiązania równań YM (1.70) i (4.1) dla samosprężonych pól  $A$  i dla metryki o sygnaturze Euklidesa, nazywamy **instantonami**. Brak zależności od metryki w (1.104) (brak operatora Hodge'a) oznacza, że otrzymane rozwiązania są niezmiennikami topologicznymi rozmaitości  $M^{2k}$  i wiązki  $E$ . Jednakże, w tym przypadku, każde  $A$  jest rozwiązaniem tak otrzymanych samosprężonych równań YM. Żeby się o tym przekonać policzmy wariację  $S(A)$ . W analogiczny sposób jak w (1.68) i (1.69) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \delta S(A) &= \delta \int_M tr(F^n) = \int_M tr \delta(F^n) = \\ &= \int_M tr(\delta F \wedge F^{n-1} + F \wedge \delta F \wedge F^{n-2} + \dots + F^{n-1} \wedge \delta F) = \\ &= n \int_M tr(\delta F \wedge F^{n-1}) = n \int_M tr(d_D \delta A \wedge F^{n-1}) = \\ &= n \int_M tr(\delta A \wedge d_D F^{n-1}) \end{aligned} \quad (1.105)$$

korzystając z tożsamości Bianchiego (1.71):

$$d_D F^{n-1} = d_D F \wedge F^{n-2} + F \wedge d_D F \wedge F^{n-3} + \dots = 0 \quad (1.106)$$

otrzymujemy, że  $\delta S(A) = 0$  dla dowolnych  $A$ . Więc  $S(A)$  nie zależy od  $A$ .

Oznacza to, że

$$\int_M tr(F^n) \quad (1.107)$$

jest **niezmiennikiem** wiązki  $E$  na zorientowanej rozmaitości  $M^{2k}$ , gdzie  $F$  jest krzywizną odpowiadającą dowolnemu (samosprężonemu)  $A$ .

Dopiero zamiana wiązki  $E$  na  $E'$  może zmienić  $tr(F^n)$ , która jest stałą dla dowolnej koneksji  $A'$  w wiązce  $E'$ .

$$\begin{aligned}\delta tr(F^k) &= tr(\delta F \wedge F^{k-1} + F \wedge \delta F \wedge F^{k-2} + \dots + F^{k-1} \wedge \delta F) = \\ &= tr(\delta F \wedge F^{k-1} + \delta F \wedge F^{k-1} + \dots + \delta F \wedge F^{k-1}) = ktr(\delta F \wedge F^{k-1}) = \\ &= ktr(d_D \delta A \wedge F^{k-1}) = ktr(d_D(\delta A \wedge F^{k-1})) = kdtr(\delta A \wedge F^{k-1})\end{aligned}\quad (1.108)$$

$tr(F^n)$  nazywamy **n-tą formą Cherna**.

Wszystkie formy Cherna są zamknięte (korzystając z (1.71)):

$$dtr(F^k) = tr(d_D F^k) = 0 \quad (1.109)$$

To znaczy, że  $k$ -ta forma Cherna jest reprezentantem tej samej klasy **kohomologii de Rhama**  $H^{2k}(M^{2k})$  dla dowolnych koneksji  $A$ . Widać, że chociaż forma Cherna zależy od koneksji  $A$ , to klasy kohomologii tej formy nie. Jeśli zmieniamy  $A$  to forma Cherna zmienia się jedynie o formę zupełną. Aby się o tym przekonać, wprowadźmy nowy potencjał wektorowy  $A'$  z krzywizną  $F'$  spełniający:

$$\delta A = A' - A \quad A_s = A + s\delta A \quad (1.110)$$

i niech  $F_s$  będzie krzywizną koneksji  $A_s$ .

Różnica form Cherna:

$$\begin{aligned}tr(F'^k) - tr(F^k) &= \int_0^1 \frac{d}{ds} tr(F_s^k) ds = k \int_0^1 dtr(\delta A \wedge F_s^{k-1}) ds = \\ &= k d \left( \int_0^1 tr(\delta A \wedge F_s^{k-1}) ds \right)\end{aligned}\quad (1.111)$$

jest zupełna.

Możemy w ten sposób zdefiniować **k-tą klasę Cherna**  $c_k(E)$  na wiązce wektorowej  $E$  (na  $M^{2k}$ ) jako klasę kohomologii odpowiadającą  $tr(F^k)$ , gdzie  $F$  jest krzywizną dowolnej koneksji na wiązce  $E$ .

Jeżeli formę krzywizny  $F$  wyrazimy poprzez reprezentację macierzową 2-formy  $F_j^i$  na  $M$  wtedy 2k-formę  $\gamma_k$  reprezentującą klasę Cherna  $c_k(E)$  możemy zapisać jako:

$$\gamma_k = \frac{(-1)^k}{(2\pi i)^k (k!)} \epsilon_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k} F_{j_1}^{i_1} \wedge \dots \wedge F_{j_k}^{i_k} \quad (1.112)$$

Dla  $n=4$  istnieją dwie liczby Cherna:

$$\int_M \gamma_2(F) \quad (1.113)$$

oraz

$$\int_M \gamma_1(F) \wedge \gamma_1(F) \quad (1.114)$$

Niezmienniki te odgrywają istotną rolę w klasyfikacji wiązek wektorowych.

## Monopol Diraca

Jednym z ciekawych wyników zastosowania klas Cherna jest monopol magnetyczny (tzw. monopol Diraca, 1931).

Zgodnie z teorią P.A.M. Diraca monopol magnetyczny powinien być fermionem o masie rzędu  $10^{16} GeV$ . Jak dotąd bez sukcesów trwają poszukiwania monopolu magnetycznego w promieniowaniu kosmicznym - np. eksperyment z nadprzewodzącą cewką (B. Cabrera)

Korzystając z działania dla elektrodynamiki klasycznej

$$S = -\frac{1}{2e^2} \int F \wedge *F \quad (1.115)$$

możemy otrzymać bezźródłowe równania elektrodynamiki:

$$d * F = 0 \quad (1.116)$$

$$dF = 0 \quad (1.117)$$

gdzie korzystając z (1.75)

$$F = ieE_i dx^0 \wedge dx^i - \frac{ie}{2} \epsilon_{ijk} B_i dx^j \wedge dx^k \quad (1.118)$$

Jak wiemy z równań tych wynika istnienie ładunku elektrycznego i brak ładunku magnetycznego (wynikający z tożsamości Bianchiego).

Jeśli  $B = dA$  dla pewnej 1-formy  $A$ , wtedy ładunek magnetyczny znika.

Najłatwiej można to pokazać korzystając z twierdzenia Stokesa na sferze  $S^2$ , która podzielona została na dwie półkule - północną  $D^1$  i południową  $D^2$ .  $\gamma$  oznacza pętlę przebiegającą po równiku (który jest brzegiem  $D^1$  oraz  $D^2$ )

$$\int_{S^2} B = \int_{D^1} B + \int_{D^2} B = \int_{\gamma} A - \int_{\gamma} A = 0 \quad (1.119)$$

Oznacza to, że monopol magnetyczny nie istnieje, jeśli pole magnetyczne pochodzi od potencjału wektorowego.

Postępując analogicznie jak w przypadku elektrostatyki rozpatrzmy monopol magnetyczny o ładunku  $g$ , który umieszczamy w punkcie  $r = 0$ .

Rozważmy pole magnetyczne typu Coulombowskiego:

$$B = \frac{g}{r^3} \mathbf{r} = -g \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \quad (1.120)$$

Korzystając ze znanej tożsamości  $\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta^3(r)$  otrzymujemy:

$$\nabla B = 4\pi g \delta^3(r). \quad (1.121)$$

Całkowity strumień na sferze otaczającej osobliwość (nasz ładunek) wynosi:

$$\int B \, dS = \int \nabla B \, dV = \Phi = 4\pi r^2 B = 4\pi g \quad (1.122)$$

Rozważmy cząstkę o ładunku elektrycznym  $e$  w polu naszego monopola magnetycznego. Funkcja falowa cząstki w obecności pola elektromagnetycznego

$$\Psi \rightarrow \Psi e^{-\frac{ie}{\hbar c} A r} \quad (1.123)$$

natomiast faza  $\alpha$  zmienia się w sposób:

$$\alpha \rightarrow \alpha - \frac{e}{\hbar c} A r \quad (1.124)$$

Policzmy ile wynosi całkowita zmiana fazy w przypadku gdy rozważać będziemy krzywą przy ustalonym  $r$  i  $\theta$ , natomiast  $\phi$  będzie się zmieniać w przedziale  $(0, 2\pi)$

$$\Delta\alpha = \frac{e}{\hbar c} \oint A \, dl = \frac{e}{\hbar c} \int \nabla \times A \, dS = \frac{e}{\hbar c} \int B \, dS = \frac{e}{\hbar c} \Phi(r, \theta) \quad (1.125)$$

dla którego  $\Phi(r, 0) = 0$  oraz  $\Phi(r, \pi) = 4\pi g$ .

Wykorzystując ten wynik oraz korzystając z warunku, iż  $\Delta\alpha = 2\pi n$ , który gwarantuje niezmienniczość funkcji falowej (1.123) otrzymujemy :

$$\begin{aligned} 2\pi n &= \frac{e}{\hbar c} 4\pi g, \\ eg &= \frac{1}{2} n \hbar c \end{aligned} \quad (1.126)$$

Jest to warunek kwantyzacji Diraca. Na jego podstawie można stwierdzić, że jeżeli gdziekolwiek we wszechświecie istnieje ładunek magnetyczny, wtedy wszystkie ładunki elektryczne będą skwantowane:

$$e = n \frac{\hbar c}{2g} \quad (1.127)$$

Problem monopola Diraca można sformułować w teorii wiązek włóknistych. Przestrzenią bazową tego problemu jest sfera otaczająca monopol -  $S^2$ , natomiast przestrzenią grupową jest  $S^1$ , gdyż jej grupą cechowania jest grupa  $U(1)$ . Wiązka nie jest jednak  $S^2 \times S^1$  ale wyrażona jest w postaci  $S^3$ , która tylko lokalnie jest tożsama z  $S^2 \times S^1$ .

Pole magnetyczne  $B$  jest pewną 2-formą w przestrzeni. Z rozwiązań bezźródłowych równań magnetostatyki na  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  otrzymujemy:

$$dB = d * B = 0 \quad (1.128)$$

co oznacza, że jeżeli rozpatrzmy przestrzeń nieściągłą (np. z wyjątkiem jednego punktu) to istnieje rozwiązanie opisujące ładunek magnetyczny  $g$ , czyli monopol Diraca:

$$\int_{S^2} B = g \quad (1.129)$$

Aby się o tym przekonać, skorzystamy z twierdzenia de Rhama, które mówi, że każdej nieściągającej n-wymiarowej rozmaitości odpowiada n-forma harmoniczna (4.38), której całka po powierzchni jest różna od zera. W naszym przypadku 2-forma powierzchni na sferze, która otacza monopol ( $r=0$ ) dana jest przez [10]:

$$F = \frac{im}{2} \sin \theta \, d\theta \wedge d\varphi \quad (1.130)$$

lub we współrzędnych kartezjańskich

$$F = \frac{im}{2r^3} (x \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z \, dx \wedge dy) \quad (1.131)$$

gdzie  $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$ . Równoważność (1.130) z (1.131) można łatwo pokazać korzystając z gwiazdki Hodge'a. W układzie sferycznym  $g = dr^2 + r^2 \sin^2 \theta \, d\theta^2 + r^2 d\varphi^2$  więc

$$*dr = r \sin \theta \, d\theta \wedge r d\varphi = r^2 \sin \theta \, d\theta \wedge d\varphi \quad (1.132)$$

Dzięki czemu możemy zapisać (1.130) jako:

$$F = \frac{im}{2} \sin \theta \, d\theta \wedge d\varphi = \frac{im}{2r^2} *dr \quad (1.133)$$

W układzie kartezjańskim

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x_i} dx^i = \frac{x dx + y dy + z dz}{r} \quad (1.134)$$

$$*dr = \frac{x *dx + y *dy + z *dz}{r} = \frac{x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy}{r} \quad (1.135)$$

Podstawiając otrzymany wynik (1.135) do (1.133) otrzymujemy (1.131).

Porównując (1.130) z jawną postacią  $F$  (1.118) otrzymujemy, że pole elektryczne znika, natomiast pole magnetyczne możemy zapisać jako:

$$B_i = \frac{m}{2er^3} x^i \quad (1.136)$$

Natomiast porównując (1.136) z wcześniej założoną (analogiczną do elektrostatyki) postacią (1.120) otrzymujemy, że ładunek magnetyczny  $g = \frac{m}{2e}$ .

Pierwsza klasa Cherna,

$$c_1 = \frac{i}{2\pi} \int_{S_2} F = \frac{i}{2\pi} \int_{S_2} \frac{im}{2} \sin \theta \, d\theta \wedge d\varphi = -\frac{m}{2} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta = -m \quad (1.137)$$

jest wielkością proporcjonalną do ładunku magnetycznego zawartego wewnątrz tej powierzchni. Wielkość ta nie zależy od metryki ani od wyboru układu współrzędnych.

Ładunek magnetyczny monopola Diraca może przybierać tylko dyskretne wartości, ponieważ liczby Cherna dla grup zwartych (dla elektrodynamiki grupą cechowania jest  $U(1)$ ) przyjmują tylko wartości całkowite, co oznacza, że ładunek magnetyczny jest skwantowany. Z warunku spełniania bezźródłowych równań elektrodynamiki (poza jednym punktem) wynika, że monopol Diraca należy do drugiej grupy kohomologii. To znaczy jest taką 2-formą  $F$ , która spełnia równanie (1.116) wszędzie (brak prądów i ładunków elektrycznych) oraz równanie (1.117) poza  $r=0$ .

### 1.2.2 Formy Cherna - Simonsa

Mając trywialną wiązkę wektorową  $E$  (na rozmaitości bazowej  $M$ ) [1] koneksję  $D$  możemy zapisać jako:

$$D = D^0 + A \quad (1.138)$$

gdzie  $D^0$  jest koneksją płaską, natomiast  $A$  jest 1-formą o wartościach w  $End(E)$ .

Pochodna zewnętrzna dla dowolnej formy  $\omega$  o wartościach w  $E$ :

$$d_D \omega = d_{D^0} \omega + A \wedge \omega \quad (1.139)$$

natomiast dla dowolnej formy  $\eta$  o wartościach w  $End(E)$ :

$$d_D \eta = d_{D^0} \eta + [A, \eta] \quad (1.140)$$

Korzystając z (1.109) wiemy, że druga forma Cherna

$$tr(F \wedge F) \quad (1.141)$$

jest zamknięta ( $dtr(F^n) = 0$ ). Dodatkowo z (1.111) wiemy, że forma ta jest zupełna. Oznacza to, że możemy znaleźć pewną 3-formę, której pochodna zewnętrzna da drugą formę Cherna.

Niech  $A_s = sA$ , natomiast krzywizna  $(A_s) F_s = sdA + s^2A \wedge A$ :

$$\begin{aligned} tr(F \wedge F) &= \int_0^1 \frac{d}{ds} tr(F_s \wedge F_s) ds = \int_0^1 tr\left(\frac{d}{ds} F_s \wedge F_s + F_s \wedge \frac{d}{ds} F_s\right) ds = \\ &= 2 \int_0^1 tr\left(\frac{d}{ds} F_s \wedge F_s\right) ds = 2 \int_0^1 tr(dA \wedge F_s) ds = 2d \int_0^1 tr(A \wedge F_s) ds = \\ &= 2d \int_0^1 tr(A \wedge (sdA + s^2A \wedge A)) ds = 2d \int_0^1 tr(sA \wedge dA + s^2A \wedge A \wedge A) ds = \\ &= 2d \left. tr\left(\frac{1}{2}s^2A \wedge dA + \frac{1}{3}s^3A \wedge A \wedge A\right) \right|_0^1 = d \left. tr\left(A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A\right) \right|_0^1 \quad (1.142) \end{aligned}$$

gdzie 3-forma:

$$\omega_3 = tr\left(A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A\right) \quad (1.143)$$

jest **formą Cherna–Simonsa**.

Policzmy pochodną zewnętrzną formy Cherna–Simonsa:

$$\begin{aligned}
d \left( \text{tr}(A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A) \right) &= \text{tr} (dA \wedge dA + A \wedge d(dA) + \frac{2}{3}d(A \wedge A \wedge A)) = \\
&= \text{tr} (dA \wedge dA + \frac{2}{3}(3A \wedge A \wedge dA)) \\
&= \text{tr} (dA \wedge dA + 2A \wedge A \wedge dA) \tag{1.144}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{tr}(F \wedge F) &= \text{tr} (dA + A \wedge A) \wedge (dA + A \wedge A) = \\
&= \text{tr} (dA \wedge dA + 2A \wedge A \wedge dA + A \wedge A \wedge A \wedge A) \\
&= \text{tr} (dA \wedge dA + 2A \wedge A \wedge dA) \tag{1.145}
\end{aligned}$$

co oznacza, że:

$$\text{tr}(F \wedge F) = d\omega = d \left( \text{tr}(A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A) \right) \tag{1.146}$$

Rozszerzając nasze rozważania na dowolny wymiar rozmaitości otrzymujemy, że  $(2k - 1)$ -forma Cherna–Simonsa wyraża się poprzez [10]:

$$\omega_{2k-1} = k \int_0^1 dt t^{k-1} \text{tr}(A \wedge (dA + t(A \wedge A))^{k-1}) \tag{1.147}$$

Działanie Cherna - Simonsa -  $S_{CS}(A)$  możemy zdefiniować jako [1]:

$$S_{CS}(A) = \int_M \text{tr}(A \wedge d_s A + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A) \tag{1.148}$$

Działanie to może być użyte jako działanie dla teorii pola w 3 wymiarach. Teorie wykorzystujące działanie Cherna – Simonsa nazywać będziemy **teoriami Cherna – Simonsa**. W ujęciu klasycznym teoria ta nie jest interesująca ponieważ równania ruchu z warunku  $\delta S_{CS}(A) = 0$  ograniczają nas do płaskiej koneksji  $A$ . Przekonamy się o tym obliczając wariacje działania Cherna – Simonsa.

$$\begin{aligned}
\delta S_{CS}(A) &= \delta \int_S \text{tr} (A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A) = \int_S \text{tr} \delta(A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A) = \\
&= \int_S \text{tr}(\delta A \wedge dA + A \wedge \delta dA + \frac{2}{3}(\delta(A \wedge A) \wedge A + (A \wedge A) \wedge \delta A)) = \\
&= \int_S \text{tr} \delta A \wedge dA + A \wedge \delta dA + \frac{2}{3}(\delta A \wedge A \wedge A + A \wedge \delta A \wedge A + A \wedge A \wedge \delta A) = \\
&= \int_S \text{tr} \delta A \wedge dA + dA \wedge \delta A + 2(A \wedge A \wedge \delta A) = \\
&= 2 \int_S \text{tr} (dA + A \wedge A) \wedge \delta A = 0 \tag{1.149}
\end{aligned}$$



skąd otrzymujemy, że dla dowolnego  $\delta A$ :

$$F = dA + A \wedge A = 0 \quad (1.150)$$

Bardzo istotną cechą tych teorii jest to iż  $S_{CS}(A)$  jest niezmiennicze względem wszystkich zachowujących orientację dyfeomorfizmów na  $S$ , oraz jest również prawie gauge niezmiennicze, tzn. niezmiennicze ze względu na przekształcenie gauge ze spójnej składowej identyczności grupy gauge. Dyfeomorficzną niezmienniczość łatwo wyjaśnić korzystając z własności

$$\int \omega = \int \phi^* \omega \quad (1.151)$$

gdzie  $\omega$  jest dowolną formą a  $\phi$  jest zachowującym orientację dyfeomorfizmem. W ogólności możemy napisać, że:

$$S_{CS}(A) = S_{CS}(\phi^* A) \quad (1.152)$$

### 1.2.3 Instanton SU(2)

Poniższe rozwiązanie zostało znalezione w 1975 roku przez Belyavina, Polyakova, Schwarz i Tyupkina i do dziś stosowane jest jako modelowe rozwiązanie wszystkich późniejszych rozwiązań instantonowych.

Rozwiązania instantonowe opisują tzw. rozciągle konfiguracje pól. Wynikają one z własności topologicznych danej teorii. W zależności od wymiaru mamy:

- W 2D - strunopodobne wiry (vertex) Nielsena–Olesena skoncentrowane wokół linii w przestrzeni
- W 3D - monopole magnetyczne t’Hoofta–Polyakova skoncentrowane wokół punktu w przestrzeni
- W 4D - instantony czyli zdarzenie–podobne konfiguracje pól skoncentrowane wokół punktu w czasoprzestrzeni

Instantonowe rozwiązania istnieją zarówno w nieabelowych teoriach z cechowanie jak i w teorii grawitacji. Pojawiają się także w teoriach supersymetrycznych - supergrawitacji i w superstrunach.

Dla 2-formy natężenia pola

$$F = dA + A \wedge A \quad (1.153)$$

mamy następujące równania ruchu:

1. tożsamość Bianchiego

$$d_D F = dF + [A, F] = dF + A \wedge F - F \wedge A = 0 \quad (1.154)$$

2. oraz równość otrzymaną z wariacji działana YM:

$$d_D * F = d * F + [A, *F] = d * F + A \wedge *F - *F \wedge A = 0 \quad (1.155)$$

Narzucając warunek  $F = \pm * F$  uzyskujemy rozwiązania automatycznie (poprzez tożsamość Bianchiego) spełniające równania ruchu.  $+$  odnosi się do rozwiązań samodualnych (instantony), natomiast  $-$  do rozwiązań antysamodualnych (antyinstantony). Warunku samodualności nie da się narzucić na poziomie lagranżjanu, możemy go narzucić jedynie na poziomie równań ruchu.

Rozważmy sferycznie symetryczne rozwiązanie  $F = \pm * F$  dla euklidesowej czterowymiarowej przestrzeni. Sygnatura powinna być euklidesowa ( $++++$ ) ponieważ w przestrzeni Minkowskiego zachodzi  $**F = -F$ , więc warunek samodualności musiałby być postaci  $F = \pm i * F$ , co dla rzeczywistych pól  $A_\mu^a$  jest niemożliwe. Nasze rozwiązanie powinno mieć skończoną energię dlatego dla  $r \rightarrow \infty$  ( $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2}$ )  $A$  powinno dążyć do czystego cechowania tzn.:

$$A \rightarrow -dU(x)U^{-1}(x) \quad (1.156)$$

co równoważne jest  $F \rightarrow 0$ . Załóżmy, że rozwiązanie jest postaci:

$$A = f(r)\gamma^{-1}d\gamma \quad (1.157)$$

gdzie reprezentacja fundamentalna grupy  $SU(2)$  ([10], (4.6))

$$\gamma(x) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x^4 - ix^3 & -x^2 - ix^1 \\ x - ix^1 & x^4 + ix^3 \end{pmatrix} \quad (1.158)$$

$f(r) \rightarrow 1$  dla  $r \rightarrow \infty$  co równoważne jest żądaniu żeby pole  $A_\mu$  dążyło do czystego pola cechowania w nieskończoności, wtedy 2-forma  $F$  dąży do zera i energia tego rozwiązania jest skończona.

Korzystając z uzupełnienia o grupie  $SU(2)$  możemy wprowadzić bazę ortogonalną:

$$h_j = -\frac{1}{r}(x^j dx^4 - x^4 dx^j + \epsilon_{ijk} x^k dx^l) \quad (1.159)$$

$$h_4 = dr = \frac{x^i}{r} dx^i \quad (1.160)$$

dla której zachodzi:

$$\gamma^{-1}d\gamma = -\frac{2i}{r}h_j T_j \quad (1.161)$$

Podstawiając założoną postać rozwiązania (1.157) do (1.153) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} F &= \frac{df}{dr} dr \wedge \gamma^{-1}d\gamma + f d\gamma^{-1} \wedge d\gamma + f^2 \gamma^{-1}d\gamma \wedge \gamma^{-1}d\gamma = \\ &= \frac{df}{dr} dr \wedge \gamma^{-1}d\gamma + (f^2 - f)(\gamma^{-1}d\gamma)^2 = \\ &= -\frac{2i}{r} \frac{df}{dr} h_4 \wedge h_i T_i - (f^2 - f) \frac{2i}{r^2} \epsilon_{ijk} T_i h_j \wedge h_k \end{aligned} \quad (1.162)$$

Forma dualna:

$$\begin{aligned} *F &= -\frac{1}{2}T_i\epsilon_{4ikl}\frac{2i}{r}\frac{df}{dr}h_k\wedge h_l - (f^2 - f)\frac{2i}{r^2}\epsilon_{jkm4}T_i\epsilon_{ijk}h_m\wedge h_4 \\ &= -\frac{4i}{r^2}(f - f^2)T_k h_4\wedge h_k + \frac{i}{r}\frac{df}{dr}\epsilon_{ikl}h_k\wedge h_l T_i. \end{aligned} \quad (1.163)$$

Po przyrównaniu  $F = *F$  otrzymujemy warunek na  $f(r)$ :

$$\frac{1}{r}\frac{df}{dr} = \frac{2}{r^2}(f - f^2) \quad (1.164)$$

Którego rozwiązaniem jest:

$$f(r) = \frac{r^2}{r^2 + c^2} \quad (1.165)$$

Działanie dla tego rozwiązania:

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{g^2}tr\int F\wedge *F = -\frac{1}{g^2}\int\frac{4}{r^3}(f - f^2)\frac{df}{dr}h_4\wedge h_j\wedge h_k\wedge h_l\epsilon_{jkl} = \\ &= \frac{24}{g^2}\int(f - f^2)\frac{df}{dr}\frac{d^4x}{r^3} = \frac{12}{g^2}\int\left(\frac{df}{dr}\right)^2\frac{d^4x}{r^2} = \frac{48}{g^2}\int\frac{d^4x}{(c^2 + r^2)^4} = \\ &= \frac{96\pi^2}{g^2}\int\frac{r^3dr}{(1 + r^2)^4} = \frac{8\pi^2}{g^2} \end{aligned} \quad (1.166)$$

Działanie to jest miarą wkładu rozwiązań nieperturbacyjnych (instantonów), w teorii kwantowej, do funkcji:

$$Z \approx e^{-S_{cl}} = e^{-\frac{8\pi^2}{g^2}} \quad (1.167)$$

co oznacza, że dla małych stałych sprzężenia  $g$  wkład jest wykładniczo mały.

Druga klasa Cherna reprezentuje niezmiennik topologiczny

$$C_2 = \frac{1}{8\pi^2}tr\int F\wedge F = -1 \quad (1.168)$$

zatem instanton  $SU(2)$  jest nietrywialnym topologicznie rozwiązaniem.  $-C_2$  nazywamy liczbą instantonową rozwiązania.

Korzystając z samodualności  $F = *F$ :

$$\int trF\wedge F = \int trF\wedge *F \quad (1.169)$$

czyli

$$8\pi^2 C_2 = -g^2 S \Rightarrow S = -\frac{8\pi^2 C_2}{g^2} \quad (1.170)$$

Rozwiązanie to można także otrzymać w nieco inny sposób [9], poprzez wprowadzenie ładunku topologicznego.

Jeżeli zdefiniujemy formę dualną

$$\tilde{F}_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}^a \quad (1.171)$$

gdzie  $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$  jest antysymetrycznym tensorem Levi-Civita dla którego  $\epsilon_{1234} = 1$ . Możemy wtedy zapisać działanie YM jako:

$$\mathcal{S}_{YM}(A) = \left( \frac{1}{8g^2} \int (F_{\mu\nu}^a \pm \tilde{F}_{\mu\nu}^a)^2 d^4x \right) \mp \frac{8\pi^2}{g^2} Q \quad (1.172)$$

gdzie  $Q$  jest ładunkiem topologicznym (tzw. indeksem Pontryagina) danym przez:

$$Q = \frac{1}{32\pi^2} \int F_{\mu\nu}^a \tilde{F}_{\mu\nu}^a d^4x = \int \partial_\mu \mathcal{K}_\mu d^4x = \int \mathcal{K}_\mu d\sigma_\mu \quad (1.173)$$

dla którego  $\mathcal{K}_\mu$  jest prądem Cherna-Simonsa

$$\mathcal{K}_\mu = \frac{1}{16\pi^2} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \left( A_\alpha^a \partial_\beta A_\gamma^a + \frac{1}{3} f^{abc} A_\alpha^a A_\beta^b A_\gamma^c \right) \quad (1.174)$$

Ładunek topologiczny zależy tylko od własności pól na sferze dla  $R \rightarrow \infty$ . Dla  $A_\mu = iU\partial_\mu U^{-1}$  ładunek  $Q$  jest liczbą całkowitą.

Z warunku skończonego działania (1.172),

$$A_\mu \rightarrow 0, \quad \text{dla } R \rightarrow \infty \quad (1.175)$$

transformacja cechowania pola  $A_\mu$  sprowadza się do warunku czystego cechowania:

$$A_\mu \rightarrow iU(x)\partial_\mu U^{-1}(x), \quad \text{dla } R \rightarrow \infty \quad (1.176)$$

Wprowadzając liczbę Cherna-Simonsa  $N_{CS}$

$$N_{CS} = \int \mathcal{K}_4 d^3x \quad (1.177)$$

ładunek topologiczny  $Q$  można wyrazić jako:

$$\begin{aligned} Q &= \int \partial_\mu \mathcal{K}_\mu d^4x = \int \left( \partial_4 \mathcal{K}_4 + \nabla \vec{\mathcal{K}} \right) d^4x = \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{d}{dt} \int \mathcal{K}_4 d^3x \\ Q &= \Delta N_{CS} = N_{CS}(t = \infty) - N_{CS}(t = -\infty) \end{aligned} \quad (1.178)$$

Pola minimalizujące działanie  $S$  (1.172) powinny spełniać warunek samosprężoności:

$$F_{\mu\nu}^a = \tilde{F}_{\mu\nu}^a \quad (1.179)$$

Za warunek brzegowy przyjmujemy wyrażenie (1.176). Działanie minimalne sprowadza się w ten sposób do wyrażenia:

$$S = \frac{8\pi^2}{g^2} |Q| \quad (1.180)$$

Rozwiązanie dla  $Q = 1$  ma postać:

$$A_\mu^a(x) = 2 \frac{\eta_{a\mu\nu} x_\nu}{x^2 + q^2} \quad (1.181)$$

gdzie

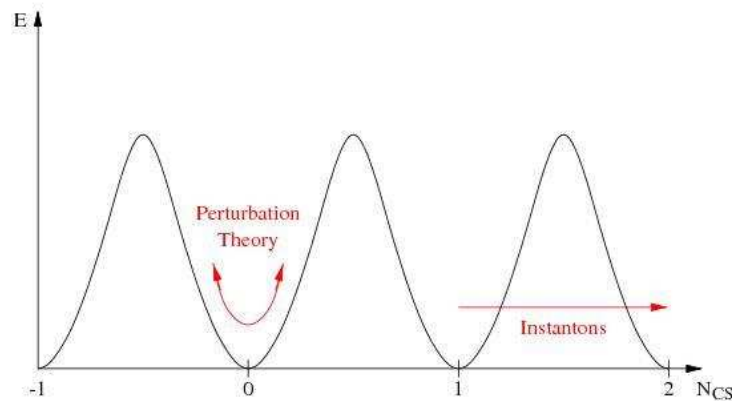
$$\eta_{a\mu\nu} = \begin{cases} \epsilon_{a\mu\nu} & a, \mu, \nu = 1, 2, 3, \\ -\delta_{a\nu} & \mu = 4, \\ \delta_{a\mu} & \nu = 4, \\ 0 & \mu = \nu = 4 \end{cases} \quad (1.182)$$

Gęstość lagranżjanu jest proporcjonalna do:

$$\mathcal{L} \approx \frac{q^4}{(x^2 + q^2)^4}. \quad (1.183)$$

Stopnie swobody klasycznego rozwiązania instantonowego nazywamy *współzrędnymi kolektywnymi*. W naszym przypadku rozwiązanie określone jest przez pozycję instantonu w przestrzeni, rozmiar instantonu  $q$ , oraz trzy parametry charakteryzujące orientację instantonu w przestrzeni parametrów grupy cechowania.

Aby nadać interpretację fizyczną musimy odnieść się do struktury próżni, która jest bardzo skomplikowana dla nieabelowych teorii z cechowaniem. Energia potencjalna pól cechowania w zależności od liczby Cherna–Simonsa tak jak przedstawia to rys (1.1) jest periodyczna. Minima (stany próżni) pojawiają się tylko dla całkowitych  $N_{CS}$  (odpowiadają one konfiguracji pól z „czystym” cechowaniem). Każde minimum jest topologicznie różne, co oznacza, że danej konfiguracji pól odpowiadającej jednemu minimum nie można otrzymać stosując serię infinitesimalnych transformacji cechowania z konfiguracji pól dla innego minimum. Instantony powodują efekt tunelowania z jednego stanu próżni do innego. Przejście ze stanu próżni dla  $N_{CS} = 0$  do stanu z  $N_{CS} = 1$  jest możliwe dzięki instantonowi o ładunku  $Q = \Delta N_{CS} = 1$ , natomiast sytuację odwrotną możemy uzyskać dla  $Q = \Delta N_{CS} = -1$ . Warto wspomnieć, że teorie perturbacyjne opisują zjawiska tylko wokół jednego minimum  $N_{CS} = 0$ . Oznacza to, że instantony możemy traktować fizycznie jako zlokalizowane w przestrzeni euklidesowej *pseudocząstki*, oraz związane z nimi procesy *tunelowania* między minimami (w czasoprzestrzeni Minkowskiego).



Rysunek 1.1: Interpretacja instantonów

### Instantony w Modelu Standardowym

W modelu standardowym i jego rozszerzeniach przewiduje się pewne procesy łamiące liczbę leptonową w oddziaływaniach elektroślabyh oraz chiralność w oddziaływaniach silnych. Można też mówić o procesach łamiących liczbę barionową. Procesy te nie są opisywane za pomocą metod perturbacyjnych. Związane są one z instantonami - topologicznie nietrywialnymi fluktuacjami pól cechowania w teoriach Yanga-Millsa. Jak już wiemy z poprzedniej części instantony są rozwiązaniami klasycznych równań ruchu w 4-ro wymiarowej przestrzeni euklidesowej, odpowiadającym specyficznym konfiguracjom pól cechowania, spełniających odpowiednie warunki brzegowe. Są one zlokalizowane w czasoprzestrzeni. Działanie dla instantonowej konfiguracji pól jest skończone. Wkłady od instantonów są niepertsurbacyjne, przez co nie ma ich w żadnym rzędzie rachunku zaburzeń. Wkłady te są proporcjonalne do czynnika  $e^{-C/g^2}$  (gdzie  $C$  jest liczbą dodatnią natomiast  $g$  to stała sprzężenia danej teorii).

Rozwiązania instantonowe możemy zinterpretować jako trajektorie opisujące tune-lowie przejście między stanami próżni. Przy obecnych energiach przekrój czynny na procesy łamania symetrii liczby barionowej i leptonowej w oddziaływaniach elektroślabyh jest bardzo mały, stąd bardzo trudno zauważyć instantony elektroślabe. Obecnie dopuszcza się również możliwość, iż procesy instantonowe we wczesnym wszechświecie mogłyby być odpowiedzialne za asymetrię między materią i antymaterią.

W QCD teoria i fenomenologia instantonów obejmuje takie zagadnienia jak:

- Modelowanie próżni QCD
- Łamanie symetrii chiralnej
- Asymptotyka szeregu perturbacyjnego
- Spektroskopia hadronów
- Niepertsurbacyjna produkcja cząstek

Łamanie chiralności prowadzi do tego, że w procesach z udziałem instantonów produkowane są kwarki i antykwarki prawoskrętne (dla antyinstantonów kwarki i antykwarki są lewoskrętne). Zaobserwowanie tego faktu eksperymentalnie byłoby silnym argumentem istnienia procesów instantonowych. W każdym procesach instantonowych produkowana jest jedna para kwarków dziwnych  $s - \bar{s}$ . Używając pary hiperonów  $\Lambda - \bar{\Lambda}$  (zawierających pierwotnie kwarki dziwne) można by zmierzyć polaryzację pary kwarków  $s - \bar{s}$ . Instantony i antyinstantony odpowiedzialne są za ustawienie spinów pary  $s - \bar{s}$  w tym samym kierunku co  $\Lambda - \bar{\Lambda}$ . Więc pomiar sprowadzałby się jedynie do obserwacji dodatkowych przypadków z parami  $\Lambda - \bar{\Lambda}$  w stanie spinowym z  $S = 1$  (w porównaniu do liczby przypadków w stanie spinowym z  $S = 0$ ). Doświadczalnie pomiar polaryzacji jest bardzo skomplikowany, dodatkowo ilość tych procesów byłaby bardzo mała, co wiąże się z trudnościami wykrycia takich procesów.

Możliwości obserwacji efektów pochodzących od instantonów QCD przy wykorzystaniu akceleratora HERA w Hamburgu w głęboko nieelastycznym rozpraszaniu elektron-proton zaproponowali A. Ringwald oraz F. Schrempp [11]. W rozpraszaniu tym padający elektron sonduje strukturę protonu poprzez rozpraszanie na jego składnikach. Odnośnie instantonów sprawa wygląda analogicznie. Instantony związane są z kwarkami, które pojawiają się jako zewnętrzne źródła (zerowe mody operatora Diraca). Padający elektron rozprasza się na instantonie wybijając kwarki z ich modów zerowych. Można przypuszczać, że eksperymentalne potwierdzenie przewidywań Ringwalda–Schremppa, byłoby podobne do eksperymentów z kwarkami w Stanford.

Jeżeli chodzi o instantony elektroślabe minimalna wartość bariery energetycznej oddzielającej różne stany próżni jest równa  $E_{sp} \approx \pi M_W / \alpha_W \approx 7,5 \text{ TeV}$  (tzw. energia sfaleronu). Poniżej tej energii procesy związane z instantonami elektroślaby są wykładniczo silnie tłumione. Obecnie nadal istnieje problem wielkości przekroju czynnego na obserwacje procesów instantonowych dla energii większych niż  $E_{sp}$ . Pewne obliczenia wykonał (w szczególnych przypadkach) A. Ringwald [11]. Pokazał on, że dopiero powyżej energii około 30 TeV przewidywany przekrój czynny wynosi w przybliżeniu  $10^{-6} \text{ pb}$ . Wynik ten jest za mały nawet dla obserwacji z LHC, jednakże w zasięgu rozważanego projektu VLHC. Inne mniej optymistyczne przewidywania (obliczenia semiklasyczne) przedstawiane przez Bezrukova i jego współpracowników (BLRRT) [11] wskazują, że efekty instantonowe są silnie tłumione nawet do energii rzędu 250 TeV. Oba te przewidywania są zgodne ze sobą dla energii poniżej  $E_{sp}$ .

Jeżeli założymy, że przewidywane przekroje czynne są prawdziwe dla bardzo dużych energii, to efekty instantonowe można by obserwować w promieniowaniu kosmicznym o bardzo wysokich energiach [11]. Dla energii neutrin  $E_\nu \geq 3 \cdot 10^{10} \text{ GeV}$  droga oddziaływania staje się mniejsza niż głębokość atmosfery. Takie neutrino o skrajnie wysokich energiach oddziałując z atmosferą, (w procesach z udziałem instantonów) powodują powstanie kaskady cząstek wtórnych, które mogłyby być rejestrowane przez detektory promieniowania kosmicznego. Detektory takie działają np. w obserwatorium Pierre Auger, dzięki czemu możliwa jest weryfikacja tych przewidywań.

Inne ciekawe zastosowania instantonów pokazał m.in. 't Hooft. Wykazał on, że instantony mogą być odpowiedzialne za łamanie symetrii aksjalnej  $U(1)$ , oraz że wyjaśniają one problem masy mezonów  $\eta$ . Jeszcze innym przykładem zastosowania instantonów mogą być odkryte w 2003 roku wąskie stany mezonów powabnych tzw. “*podwojenia chiralnego*”. Podstawą teoretyczną tego zjawiska jest właśnie instantonowa próżnia QCD.

Chociaż wszystkie powyższe przykłady są dobrze opisane teoretycznie nadal brakuje eksperymentalnego bezpośredniego dowodu na istnienie instantonów.

Dyskusja modelu standardowego z punktu widzenia teorii wiązek włóknistych, przedstawiona w tym rozdziale, jest głównie klasyczna. Przejście do kwantowych aspektów teorii pola możemy formalnie stowarzyszyć z próbą rozciągnięcia formalizmu na dowolne rozmaitości (czasowo-przestrzenne) gładkie, a więc uwzględniając obecność materialnego pola grawitacyjnego. Taka próba została zapoczątkowana w latach 80-tych XX wieku (Segal, Atyiah, Witten), i co ważne dla tematu tej pracy, równocześnie odnosi się do czysto topologicznej informacji zakodowanej w strukturze kwantowej teorii pola (w dowolnych wymiarach). To przedsięwzięcie jest znane jako topologiczne kwantowe teorie pola (TQFT) i zostanie przybliżone w następnych rozdziałach.



## Rozdział 2

# Topologiczne Kwantowe Teorie Pola

Wielkim wyzwaniem dla fizyki XX i XXI wieku było i nadal jest pogodzenie i jednolity, opis teorii grawitacji (OTW) i kwantowej teorii pola (KTP). Obie teorie są bardzo dobrze weryfikowalne doświadczalnie w swoich zakresach stosowności. Powstanie kwantowej teorii grawitacji powinno przynieść nie tylko lepsze zrozumienie własności czasoprzestrzeni, ale także lepsze zrozumienie teorii kwantowych. Oczywiście ze względu na olbrzymie sukcesy teorii kwantów trudno wyobrazić sobie, iż teoria kwantowa miałaby zostać zastąpiona, przez jakąś inną teorię. Teoria grawitacji oraz teorie kwantowe bazują na zupełnie różnych dziedzinach matematyki. OTW bazuje na analizie na różniczkowych, którymi modelujemy czasoprzestrzeń, natomiast teorie kwantowe posługują się przestrzeniami Hilberta i aparatem operatorów na tych przestrzeniach. Może to sugerować, że połączenie tych dwóch teorii wymagać będzie jakiegoś całkiem nowego formalizmu. W rozdziale tym spróbujemy podać pewną propozycję jednolitego opisu kwantowej teorii pola oraz grawitacji, wychodzącą z formalizmu teorii kategorii [2], [3], [5], [8]. Pewne podstawowe informacje dotyczące teorii kategorii można znaleźć w uzupełnieniach (4.2). Interesować nas tutaj będą dwie kategorie. Pierwsza to kategoria **Hilb**, której obiektami są przestrzenie Hilberta natomiast morfizmami są liniowe operatory między tymi przestrzeniami. Drugą kategorią będzie kategoria tzw. kobordyzmów **nCob** gdzie obiekty to  $(n - 1)$ -wymiarowe rozmaitości, odpowiadające przestrzennej składowej czasoprzestrzeni. Natomiast morfizmami są  $n$ -wymiarowe rozmaitości zwane **kobordyzmami**, które odpowiadają czasoprzestrzeni. Bardzo łatwo wyobrazić sobie obiekty i morfizmy kategorii **nCob**, wystarczy przyjrzeć się graficznej reprezentacji diagramów Feynmana. Każda z rozmaitości z kategorii **nCob** ma niewiele wspólnego z przestrzeniami Hilberta. Pokażemy jednak, że gdy porównamy strukturę wszystkich rozmaitości tworzących **nCob** ze strukturą **Hilb** wyłonią się zdumiewające podobieństwa.

Archetypem kategorii jest kategoria zbiorów **Set**. Obiektami w tej kategorii są zbiory, natomiast morfizmami są funkcje przeprowadzające jedne zbiory w inne ( $f: X \rightarrow Y$ ). Traktowanie zbiorów jako przykładu kategorii może być mylące ponieważ jedyną informacją jaką posiada obiekt  $x$  w tej kategorii jest jego nazwa " $x$ ". W ogólnych kategoriach **morfizmy są równie ważne jak obiekty** a nawet są bardziej podstawowe. Cała informacja o kategorii może być zapisana w strukturze jej morfizmów.

Obiekty i morfizmy w teorii kategorii mogą być jednak zupełnie inne niż zbiory i funkcje. Dobrym przykładem jest kluczowa dla TQFT kategoria kobordyzmów.

Naturalne wydaje nam się założenie, że układ kwantowy opisywany jest poprzez zbiór stanów. Można by oczekiwać, że powinna istnieć pewna naturalna zależność pomiędzy kategorią Hilb a kategorią Set. W języku kategorii mówimy, że byłby to **funktor**, tzn. obiektom i morfizmom jednej kategorii przyporządkowujemy obiekty i morfizmy drugiej kategorii, tak że spełnione są pewne własności (por. Uzupełnienie 4.2). Okazuje się jednak, że dużo większe podobieństwa zachodzą pomiędzy kategoriami Hilb i nCob niż Set. To wyraźne wskazanie na to, że może należałoby zrezygnować z przypisywania wyróżnionej i nadrzędnej roli kategorii Set, gdy myślimy o uzgodnieniu formalizmu mechaniki kwantowej i OTW. To też przesłanka za badaniem topologicznych kwantowych teorii pola w tym kontekście.

## 2.1 Definicja TQFT

Zacznijmy od określenia pewnych obiektów. Rozpatrzmy Riemannowską rozmaitość  $M$  z metryką  $g_{\mu\nu}$  i niech  $\Phi$  oznacza zbiór pewnych pól na  $M$ , dla których możemy zapisać działanie  $S(\Phi)$ . Operatory odpowiadające obserwabdom oznaczmy przez  $\mathcal{O}(\Phi)$ . Są to funkcyjały pól. Możemy zdefiniować **wartość oczekiwaną próżni** iloczynu operatorów jako:

$$\langle \mathcal{O}_\alpha \mathcal{O}_\beta \cdots \mathcal{O}_\gamma \rangle = \int e^{-S(\Phi)} \mathcal{O}_\alpha(\Phi) \mathcal{O}_\beta(\Phi) \cdots \mathcal{O}_\gamma(\Phi) \mathcal{D}(\Phi) \quad (2.1)$$

gdzie  $\mathcal{D}(\Phi)$  jest pewną miarą funkcjonalną.

Kwantową teorię pola na  $M$  nazwiemy **topologiczną** jeżeli powyższy zbiór operatorów (obserwabli) teorii, jest niezmienniczy przy dowolnej deformacji metryki, czyli:

$$\delta_g \langle \mathcal{O}_\alpha \mathcal{O}_\beta \cdots \mathcal{O}_\gamma \rangle = 0 \quad (2.2)$$

co oznacza, że wartości oczekiwane iloczynu operatorów są niezmiennikami topologicznymi (niezależnymi od metryki).

Jeżeli wielkości te są niezmiennicze ze względu na dyfeomorfizmy bazowej rozmaitości  $M$  to wtedy mówimy o **gładkich niezmiennikach**.

W ujęciu całek po trajektoriach Feynmana w kwantowej teorii pola amplitudy przejścia możemy wyrazić jako pewne całki po całej przestrzeni pól modulo swoboda cechowania (używając do tego pewnej miary funkcjonalnej  $\mathcal{D}\Phi$ ) z:

$$e^{\frac{i}{\hbar} S(\Phi)} \mathcal{D}\Phi \quad (2.3)$$

gdzie  $S$  to pewne działanie klasyczne. Zwykle są problemy z poprawnym zdefiniowaniem tej „miary” funkcjonalnej, ale nasza dyskusja jest jedynie „heurystyczna” i chodzi o przedstawienie pewnych idei. Okazuje się, że taka analiza prowadzi do poprawnych matematycznie wyników.

Rozważmy teorie YM z wiązką  $E$  jako  $G$ -wiązką nad zorientowaną (pseudo)-Riemmanowską rozmaitością  $M$ . Jeżeli przez  $A$  oznaczymy koneksję wiązki  $E$ , wtedy działanie YM możemy zapisać jako (1.67)

$$S_{YM}(A) = \frac{1}{2} \int_M \text{tr}(F \wedge *F). \quad (2.4)$$

W klasycznej teorii pola zainteresowani jesteśmy rozwiązaniami równań YM, które otrzymujemy z zasady wariacyjnej. Natomiast w kwantowej teorii pola użyjemy klasycznego działania do zdefiniowania i wyznaczenia wartości oczekiwanej próżni obserwabli teorii. Obserwabłę możemy traktować jako gauge niezmienniczą funkcję na przestrzeni  $\mathcal{A}$  wszystkich  $G$ -koneksji na  $E$ . Wartość oczekiwaną próżni obserwabli  $\mathcal{O}$  możemy zdefiniować analogicznie jak w (2.1) jako:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int_{\mathcal{A}} \mathcal{O}(A) e^{\frac{1}{\hbar} S_{YM}(A)} \mathcal{D}A \quad (2.5)$$

gdzie  $\mathcal{D}A$  jest miarą funkcjonalną na  $\mathcal{A}$ , a stała normalizacyjna  $Z$ :

$$Z = \int_{\mathcal{A}} e^{\frac{1}{\hbar} S_{YM}(A)} \mathcal{D}A \quad (2.6)$$

nazywana jest **funkcją rozkładu** (ang. partition function) analogicznie jak w fizyce statystycznej.

Warto zaznaczyć, że obserwabla w teoriach z cechowaniem w formalizmie całek po trajektoriach są gauge niezmienniczymi funkcjami na  $\mathcal{A}$ , czyli całkowanie odbywa się właściwie po przestrzeni  $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ , gdzie  $\mathcal{G}$  jest grupą przekształceń cechowania wiązki  $E$ .

Zobaczymy jak w naturalny sposób, przy skorzystaniu z formalizmu teorii kategorii, pojawia się funkcja rozkładu w topologicznej kwantowej teorii. Istnieje zupełnie ogólne przedstawienie własności takich teorii. Odpowiednią aksjomatykę podał Atiyah [5]. Ciekawe, że już na poziomie aksjomatów występuje obiekt odpowiadający powyższej funkcji rozkładu w sformułowaniu całek po trajektoriach.

## Aksjomaty Atiyah'a

**Definicja 1**  *$n$ -wymiarową topologiczną kwantową teorią pola jest funktor  $Z$  (patrz Uz. 4.2) który przyporządkowuje:*

1. *każdej zamkniętej, zorientowanej, gładkiej,  $(n - 1)$ -wymiarowej rozmaitości  $\Sigma$  zespolonej, skończenie wymiarową przestrzeń wektorową  $Z(\Sigma)$*
2. *dla każdej zwartej, zorientowanej  $n$ -wymiarowej rozmaitości  $M$  z brzegiem  $\Sigma$ , wektor  $Z(M) \in Z(\Sigma)$*

Ponadto wymaga się spełnienia następujących aksjomatów:

A.1.

$$Z(\Sigma^*) = Z(\Sigma)^* \quad (2.7)$$

gdzie  $\Sigma^*$  oznacza  $\Sigma$  z przeciwną orientacją, natomiast  $Z(\Sigma)^*$  jest przestrzenią liniową dualną.

A.2. Rozłącznej sumie  $(n-1)$ -rozmaitości  $\Sigma_1, \Sigma_2$  odpowiada iloczyn tensorowy przestrzeni liniowych:

$$Z(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) = Z(\Sigma_1) \otimes Z(\Sigma_2) \quad (2.8)$$

A.3. Dla każdego dyfeomorfizmu  $f: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$  pomiędzy zamkniętymi,  $(n-1)$ -wymiarowymi rozmaitościami  $\Sigma_i$  istnieje liniowy izomorfizm  $Z(f): Z(\Sigma_1) \rightarrow Z(\Sigma_2)$ , dla którego zachodzi  $Z(fg) = Z(f)Z(g)$  (gdzie  $g: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_3$ ). Dodatkowo dla każdego dyfeomorfizmu  $h: M_1 \rightarrow M_2$  pomiędzy zwartymi  $n$ -wymiarowymi rozmaitościami (z brzegami  $\partial M_i = \Sigma_i$ ) zakładamy, że  $Z(M_2) = Z(h)((Z(M_1)))$ .

A.4. Łączność. Jeśli  $M_1$  i  $M_2$  z brzegami odpowiednio  $\Sigma_1^* \cup \Sigma_2$  i  $\Sigma_2^* \cup \Sigma_3$ , są sklejone wzdłuż wspólnego brzegu  $\Sigma_2$ , to dla takiego złożenia kobordyzmów  $M = M_1 \cup_{\Sigma_2} M_2$  zachodzi:

$$Z(M) = Z(M_1 \cup_{\Sigma_2} M_2) = Z(M_2) \circ Z(M_1) \in \text{Hom}(Z(\Sigma_1), Z(\Sigma_3)). \quad (2.9)$$

A.5. Dla pustej  $(n-1)$ -wymiarowej rozmaitości

$$Z(\emptyset) = \mathbb{C} \quad (2.10)$$

gdzie  $\mathbb{C}$  jest przestrzenią liczb zespolonych.

A.6.  $Z(\Sigma \times I) = \text{id}_{Z(\Sigma)}$  jest endomorfizmem identycznościowym na  $Z(\Sigma)$ .

Aksjomaty (A.1) oraz (A.2) implikują, że dla dowolnej  $n$ -rozmaitości  $M$ , której brzegiem jest  $\partial M: \Sigma_1^* \cup \Sigma_2$ , funktor  $Z$  przypisuje wektor  $Z(M) \in Z(\Sigma_1)^* \otimes Z(\Sigma_2) = \text{Hom}(Z(\Sigma_1), Z(\Sigma_2))$ .

Warto zauważyć, że nie występuje tu jawnie lokalna symetria Lorentza. Dyskusja tej symetrii może być podjęta po odpowiednim wyborze przestrzeni Hilberta przyporządkowanych brzegom  $n$ -rozmaitości.

### Konsekwencje aksjomatów Atiyah'a

1. Dla rozłącznych rozmaitości  $M_1$  oraz  $M_2$  (dla których  $\partial M_i = \Sigma_i$  oraz  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ ) korzystając z A.4, wektor  $Z(M_1 \cup M_2)$  jest iloczynem tensorowym odpowiednich wektorów

$$Z(M_1 \cup M_2) = Z(M_1) \otimes Z(M_2) \in Z(\Sigma_1) \otimes Z(\Sigma_2) \quad (2.11)$$

2. Stosując A.4 w przypadku gdy  $M_1 = M_2 = \emptyset$  otrzymujemy, że  $Z(M_1 \cup M_2) = Z(\emptyset) \in \mathbb{C}$  spełnia  $Z(\emptyset) = 1$ .
3. Stosując A.4 dla  $M = \Sigma \times I$  (gdzie  $\Sigma$  jest zamkniętą,  $(n-1)$  wymiarową rozmaitością, natomiast  $I = [0, 1]$ ) otrzymujemy, że  $Z(M): Z(\Sigma) \rightarrow Z(\Sigma)$  jest operatorem rzutowym spełniającym  $Z(M)^2 = Z(M)$ .
4. Dla zamkniętej  $n$ -wymiarowej rozmaitości brzeg jest pusty ( $\partial M = \emptyset$ ), więc korzystając z A.5 (2.10) wektor  $Z(M) \in Z(\Sigma)$  będzie liczbą zespoloną, która zależy od klasy dyfeomorfizmów gładkiej rozmaitości  $M$ . Liczby te są jak mówimy **niezmiennikami topologicznymi** gładkich rozmaitości, chociaż, jak widzimy, są raczej niezmiennikami gładkich struktur rozmaitości. Przy założeniu jednoznacznej odpowiedniości struktur gładkich i topologii rozmaitości, są to równoważne pojęcia. W ogólnej sytuacji i w analogii do fizyki statystycznej, sposób przyporządkowania tych liczb rozmaitościom (więc wyliczenie ich np. pewną całką funkcjonalną) nazywamy *funkcjami rozkładu* (por. 2.6) rozmaitości  $M$ .

$$I(M) := Z(M). \quad (2.12)$$

5. Dla zwartej  $n$ -wymiarowej rozmaitości  $M$  z brzegiem  $\partial M: \Sigma_1^* \cup \Sigma_2$ , gdzie  $\Sigma_1$  oraz  $\Sigma_2$  są dyfeomorficzne, możemy użyć tego dyfeomorfizmu  $f: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1$  aby skleić  $M$  ze sobą wzdłuż tego brzegu i otrzymać nową zamkniętą rozmaitość  $M_f$ . Korzystając z A.3 istnieją izomorfizm przestrzeni wektorowych  $g: Z(\Sigma_2) \rightarrow Z(\Sigma_1)$ , taki że funkcja rozkładu rozmaitości  $M_f$  może być wyrażona jako ślad:

$$I(M_f) = \text{tr}_{Z(\Sigma_1)}(g \circ Z(M)) \quad (2.13)$$

W formalizmie całek po trajektoriach liczenie śladu jest równoważne wycalkowaniu po wszystkich możliwych warunkach brzegowych  $\Sigma_1 =_f \Sigma_2$ . Jeżeli przyjmiemy, że  $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$  natomiast  $g = \text{id}_{Z(\Sigma)}$

$$I(M_{\text{id}_\Sigma}) = \text{tr}_{Z(\Sigma)} Z(M) = \int e^{\frac{i}{\hbar} S(A, e)} \mathcal{D}A \mathcal{D}e \quad (2.14)$$

Wypisaliśmy tutaj zależność działania  $S$  również od pól  $e$ , które określają zależność od metryki. Wycalkowanie po wszystkich takich polach (zatem obecność miary  $\mathcal{D}e$  w całce funkcjonalnej) prowadzi do uzyskania wielkości (funkcji rozkładu  $Z$ ) niezależnej od metryki, czyli będącej topologicznym niezmiennikiem.

Dlatego szczególnie ważne są punkty 4 i 5. To dzięki dyfeomorficznej symetrii gauge, funkcja rozkładu  $I(M)$ , wyznaczana z całki funkcjonalnej, jest niezmiennikiem topologicznym gładkiej rozmaitości  $M$ . Chociaż funkcja rozkładu sama nie jest bezpośrednio interpretowana fizycznie, to z niej uzyskujemy już fizyczne wielkości teorii.

Takimi fizycznie istotnymi wielkościami teorii są elementy macierzowe uzyskane z funkcji rozkładu:

$$\langle \psi(A_{|\Sigma_1}) | Z(M) | \psi(A_{|\Sigma_2}) \rangle = \int \bar{\psi}(A_{|\Sigma_1}) \psi(A_{|\Sigma_2}) e^{\frac{i}{\hbar} S(A,e)} \mathcal{D}A \mathcal{D}e \quad (2.15)$$

$\psi(A_{|\Sigma_i})$ ,  $i = 1, 2$  są konfiguracjami pól w chwili  $t = t_1$  i  $t = t_2$ , czyli określonymi na  $\Sigma_1$  i  $\Sigma_2$  i dlatego nie zależą od  $e$ .

Taka topologiczna teoria byłaby może formalnie ciekawa ale pusta gdyby nie konkretne przykłady skonstruowane w ciągu ostatnich lat a właściwie uświadomienie sobie roli topologicznej niezmienniczości w kontekście teorii znanych dużo wcześniej, takich jak teorie Yanga–Millsa. TQFT to dobry aparat matematyczny do dyskusji topologicznej niezmienniczości, czy dyfeomorficznej niezmienniczości w teoriach pola. Można dzięki niemu wykryć i zanalizować np. elementy utrudniające jednolity opis teorii YM i OTW.

Niezwykle interesującym przykładem **topologicznej kwantowej teorii pola** w 4-ch wymiarach jest teoria Donaldsona–Wittena, którą podał Witten w swojej pracy z 1988 roku. Zauważył on fakt, że pewna zmodyfikowana wersja supersymetrycznej teorii Yanga–Millsa z  $\mathcal{N} = 2$  supersymetriami w płaskiej 4-ro wymiarowej przestrzeni Minkowskiego, nie posiada już lokalnych stopni swobody, posiada natomiast jedynie globalne stopnie swobody, które są niezmiennikami topologicznymi nowych (niepłaskich) 4-ro rozmaitości. Dzięki tej modyfikacji, zwanej często skręceniem (ang. twist), Witten nadał fizyczną interpretację matematycznej teorii Donaldsona. Wielomiany Donaldsona to niezmienniki topologiczne zwartych, jednospójnych gładkich 4-ro rozmaitości, znane od około 1982 roku. Pytanie o istnienie takiej fizycznej interpretacji zostało sformułowane przez Atiyah’a jako jeden z podstawowych problemów fizyki teoretycznej. Chodziło o znalezienie (jeśli w ogóle byłoby to możliwe) teorii pola, w której wielomiany Donaldsona byłyby obserwabłami tej teorii, tzn funkcjami korelacji. Podobny problem dotyczył fizycznej interpretacji niezmienników topologicznych węzłów i splotów zanurzonych w 3-wymiarowych rozmaitościach. Matematycznymi niezmiennikami takich węzłów i splotów są znane od 1985 wielomiany Jonesa. Rozwiązanie obu tych problemów podał Witten. Była to właśnie teoria pola Donaldsona–Wittena w wymiarze 4 oraz 3-wymiarowa teoria Cherna–Simonsa. Oprócz tych dwóch modeli Witten podał jeszcze topologiczny model  $\sigma$  w dwóch wymiarach generujący tzw. niezmienniki Gromova-Wittena.

## 2.2 Formalizm teorii kategorii w TQFT

Korzystając z pewnych analogii z OTW, jeżeli założymy, że wszechświat jest modelowany  $n$ -wymiarową rozmaitością, mamy całkowitą dowolność przy wyborze  $(n - 1)$ -wymiarowej rozmaitości reprezentującej naszą przestrzeń w ustalonej chwili czasu. Ponadto jeżeli mamy dwie takie rozmaitości, powiedzmy  $\Sigma$  i  $\Sigma'$ , to wybór dowolnej  $n$ -wymiarowej rozmaitości z brzegiem np.  $M$  z brzegiem  $\partial M = \Sigma \cup \Sigma'$ , reprezentuje obszar czasoprzestrzeni zawartej między  $\Sigma$  i  $\Sigma'$ . Możemy wtedy napisać, że  $M: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ . Warto zauważyć, że  $M$  nie jest zwykłą funkcją z  $\Sigma$  do  $\Sigma'$ . O  $M$  możemy powiedzieć, że przedstawia pewien proces zachodzący w czasoprzestrzeni pomiędzy chwilą  $\Sigma$  i  $\Sigma'$ .

Matematycy nazywają  $M$  **kobordyzmem** z  $\Sigma$  do  $\Sigma'$ . W ten sposób mamy określoną kategorię  $n\text{Cob}$ , której obiektami są  $(n-1)$ -wymiarowe rozmaitości zamknięte a morfizmami są właśnie  $n$ -wymiarowe kobordyzmy pomiędzy tymi rozmaitościami.

### Kategoria kobordyzmów - $n\text{Cob}$

Kategoria  $n\text{Cob}$ , czyli kategoria  $n$ -wymiarowych kobordyzmów to kategoria w której, obiektami są  $(n-1)$ -wymiarowe zorientowane i zamknięte (czyli zwarte i bez brzegu) rozmaitości  $\Sigma$ , natomiast morfizmami  $M: \Sigma \rightarrow \Sigma'$  są kobordyzmy, czyli zwarte, zorientowane  $n$ -wymiarowe rozmaitości  $M$ . Morfizmy te nie są po prostu funkcjami zachowującymi pewną strukturę (mnożościową) obiektów - rozmaitości.

Kobordyzmy można ze sobą sklejać. W wyniku składania kobordyzmów  $M: \Sigma \rightarrow \Sigma'$  oraz  $N: \Sigma' \rightarrow \Sigma''$  otrzymujemy kobordyzm  $NM: \Sigma \rightarrow \Sigma''$ . Można to zilustrować poprzez traktowanie kobordyzmu jako procesu zachodzącego w pewnym czasie. Składanie mówi nam wtedy, że proces zachodzący w czasie  $t$  (korespondujący z  $M$ ) następnie w czasie  $t'$  (korespondujący z  $N$ ), możemy potraktować jako proces zachodzący w czasie  $t + t'$  (korespondujący z  $NM$ ). Składanie kobordyzmów spełnia prawo:

$$(M''M')M = M''(M'M) \quad (2.16)$$

Dodatkowo dla każdej  $(n-1)$ -wymiarowej rozmaitości  $\Sigma$  istnieje kobordyzm  $1_\Sigma: \Sigma \rightarrow \Sigma$  zwany kobordyzmem **identycznościowym** lub trywialnym, dla którego topologia rozmaitości  $\Sigma$  pozostaje niezmienną.

$$1_\Sigma M = M 1_\Sigma = M \quad (2.17)$$

Dwa kobordyzmy nieodróżnialne w kategorii  $n\text{Cob}$  są wyznaczone z dokładnością do tzw. relacji homotopii. Dokładniej:

Jeśli  $M$  i  $N$  są dwoma przestrzeniami topologicznymi, wówczas

**Definicja 2** *Odwzorowania ciągłe  $f, g: M \rightarrow N$  nazywamy homotopijnymi ( $f \cong g$ ) jeżeli istnieje ciągłe odwzorowanie  $F: [0, 1] \times M \rightarrow N$  dla którego  $F(0, p) = f(p)$  oraz  $F(1, p) = g(p)$  dla dowolnego  $p \in M$ . Odwzorowanie  $F$  nazywamy homotopią.*

**Definicja 3**  *$M$  i  $N$  są homotopijnie równoważne (tego samego typu homotopii  $M \cong N$ ) jeżeli istnieją odwzorowania ciągłe  $f: M \rightarrow N$  oraz  $g: N \rightarrow M$  takie, że:  $f \circ g \cong \text{id}_N$  oraz  $g \circ f \cong \text{id}_M$*

Mając dyfeomorfizm  $f: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ , możemy utworzyć **kanoniczny, trywialny kobordyzm**  $M_f: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ :

$$\Sigma_1 \xrightarrow{id} M \times I \xleftarrow{f^{-1}} \Sigma_2 \quad (2.18)$$

Zachodzi:

**Twierdzenie 1** Dwa dyfeomorfizmy  $\Sigma_1 \xrightarrow{f} \Sigma_2$  oraz  $\Sigma_1 \xrightarrow{f'} \Sigma_2$  wyznaczają tę samą klasę kobordyzmów  $M: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$  wtedy i tylko wtedy, gdy są homotopijne.

Zobaczmy co taka kategoria może mieć wspólnego z teoriami kwantowymi. Po pierwsze, tak jak możemy wybrać  $(n-1)$ -wymiarową rozmaitość reprezentującą przestrzeń, tak samo możemy użyć pewnej przestrzeni Hilberta do opisanie stanów dowolnego układu kwantowego. Po drugie analogicznie jak przy wyborze kobordyzmów możemy użyć operatorów do opisu przejścia ze stanów jednego układu kwantowego do stanów innego układu. Ściślej rzecz biorąc, mając układy których stany opisywane są przez przestrzenie Hilberta  $H$  i  $H'$  możemy zdefiniować operator  $T: H \rightarrow H'$  opisujący proces przenoszenia stanów z pierwszego układu kwantowego na drugi. Możemy dodatkowo założyć, że operator  $T$  jest unitarny, co odpowiadałoby np. ewolucji stanów kwantowych.

Mając jednostkowy wektor  $\psi \in H$  i ortogonalną bazę  $\phi_i \in H'$  możemy wyznaczyć względne prawdopodobieństwo, że układ przygotowany w stanie  $\psi$  po zajściu procesu  $T$  będzie obserwowany w stanie  $\phi_i$ . Prawdopodobieństwo to jest równe  $|\langle \phi_i, T\psi \rangle|^2$ . Użycie nieunitarnych operatorów do opisu procesów kwantowych jest również możliwe, np. gdy pewną część układu traktujemy klasycznie. W ogólności zakłada się, że na fundamentalnym poziomie, prawa natury w teoriach kwantowych opisujące ewolucję w czasie, opisywane są przez operatory unitarne. Jeśli jednak dopuścimy zmianę topologii przestrzeni, to taka ewolucja może być opisywana operatorem nieunitarnym. Dlatego w kategorii Hilb bierzemy pod uwagę wszystkie operatory liniowe pomiędzy przestrzeniami Hilberta i są to właśnie morfizmy tej kategorii. Odpowiadają im "procesy", podobnie jak w kategorii nCob, gdzie wszystkie morfizmy, tj.  $n$ -kobordyzmy, kwalifikujemy jako czasoprzestrzenie.

Analogie między kategoriami nCob i Hilb możemy zastosować do opisu analogii pomiędzy OTW oraz teoriami kwantowymi. Przedstawia to poniższa tabela.

Analogie	
OTW	Teoria kwantowa
$(n-1)$ -wymiarowa rozmaitość (przestrzeń)	Przestrzeń Hilberta (stany)
Kobordyzmy (czasoprzestrzeń)	Operatory liniowe (procesy)
składanie kobordyzmów	składanie operatorów
kobordyzm trywialny	operator id

Tablica 2.1: Analogie między OTW i teorią kwantową

Analogie te stają się bardziej oczywiste jeżeli posłużyć się językiem topologicznych kwantowych teorii pola. TQFT można opisać jako pewien funktor z nCob do Hilb.



### 2.2.1 Pewne własności TQFT jako funktora z nCob do Hilb

Przypomnijmy, że (patrz uzupełnienia 4.2)

**Kategoria** składa się z klasy obiektów, oraz pewnej klasy morfizmów  $f: x \rightarrow y$  dla dwóch dowolnych obiektów  $x$  i  $y$  należących do kategorii. Możemy składać morfizmy  $f: x \rightarrow y$ ,  $g: y \rightarrow z$  otrzymując morfizm  $fg: x \rightarrow z$ . Składanie morfizmów musi spełniać  $f(gh) = (fg)h$  oraz  $1_x f = f$ ,  $f 1_x = f$ , gdzie  $1_x: x \rightarrow x$  jest morfizmem identycznościowym. W pewnych przypadkach (np. Hilb) możemy rozpatrywać obiekty kategorii jako [1] *zbiory z wewnętrzną strukturą*, podczas gdy morfizmy to *funkcje zachowujące wewnętrzną strukturę obiektów*.

**Funktor** między kategoriami nazywamy odwzorowanie przeprowadzające obiekty i morfizmy jednej kategorii w obiekty i morfizmy drugiej kategorii, tak aby składanie i identyczność były zachowane.

W ten sposób możemy powiedzieć, że topologiczna kwantowa teoria pola jest funktorem, gdzie rolę przestrzeni liniowych w definicji Atiyah'a pełnią przestrzenie Hilberta:

$$Z: nCob \rightarrow Hilb. \quad (2.19)$$

Definicja ta oznacza, że każdej  $(n - 1)$ -wymiarowej rozmaitości  $\Sigma$  odpowiada przestrzeń Hilberta  $Z(\Sigma)$ , natomiast każdemu  $n$ -wymiarowemu kobordyzmowi odpowiada liniowy operator  $Z(M): Z(\Sigma) \rightarrow Z(\Sigma')$ . Dodatkowo spełnione są następujące zależności:

- Dla dowolnych  $n$ -wymiarowych kobordyzmów  $M: \Sigma \rightarrow \Sigma'$  oraz  $M': \Sigma' \rightarrow \Sigma''$  zachodzi:

$$Z(M'M) = Z(M')Z(M) \quad (2.20)$$

- Dla dowolnej  $(n - 1)$ -wymiarowej rozmaitości  $\Sigma$  zachodzi:

$$Z(1_\Sigma) = 1_{Z(\Sigma)} \quad (2.21)$$

Z drugiego podpunktu można wnioskować, że stany układu w którym nie ma zmiany topologii nie są opisywane przez teorię. Oznacza to, że TQFT opisuje układ nie zawierający lokalnych stopni swobody - "background free theory".

W kategorii nCob możemy zdefiniować sprzężenie hermitowskie kobordyzmu  $M: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$  jako nowy kobordyzm  $M^\dagger: \Sigma_2^* \rightarrow \Sigma_1^*$ , który otrzymujemy z odwrócenia orientacji kobordyzmu  $M$ .

Naturalny iloczyn w kategorii Hilb to iloczyn tensorowy przestrzeni Hilberta, a w kategorii nCob suma rozłączna  $(n - 1)$ -rozmaitości. Jednak w kategorii Hilb możemy również utworzyć iloczyn tensorowy dwóch operatorów liniowych i w efekcie otrzymać operator, który działa pomiędzy odpowiednimi iloczynami tensorowymi przestrzeni Hilberta. Można powiedzieć, że określony jest w ten sposób łączny proces tych dwóch, zachodzących równolegle. Podobnie w kategorii nCob możemy utworzyć iloczyn kobordyzmów i otrzymać ich sumę rozłączną. Taka suma to też pewien łączny proces pewnych równoległych procesów.

Oba te iloczyny w Hilb i nCob mają wspólną cechę: **nie są to iloczyny kartezjańskie**, tzn. takie, że byłyby jednoznacznie określone rzutowanie na poszczególne czynniki i te rzutowania byłyby funktorami w odpowiednich kategoriach. W nCob trudno pokazać naturalny kobordyzm pomiędzy np.  $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$  a  $\Sigma_1$  ( $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$  to oczywiście suma rozłączna rozmaitości  $\Sigma_1$  i  $\Sigma_2$ ). Podobnie, w Hilb nie ma naturalnego i jednoznacznego rzutowania  $H_1 \otimes H_2 \rightarrow H_1$  (tutaj,  $H_1 \otimes H_2 \rightarrow H_1$  oznacza iloczyn tensorowy przestrzeni  $H_1$  i  $H_2$ ). Pewne wektory w iloczynie tensorowym przestrzeni nie są iloczynem tensorowym wektorów z przestrzeni składowych. Ta ostatnia własność jest odpowiedzialna za czysto kwantowe zjawiska jak interferencja stanów czy splątanie stanów.

Jeśli, natomiast, weźmiemy kategorię Set (zbiorów i funkcji), to naturalnym produktem kartezjańskim jest tutaj iloczyn kartezjański dwóch zbiorów. Istnieje jednoznacznie określona funkcja (a więc morfizm w Set) z iloczynu kartezjańskiego dwóch zbiorów na poszczególne czynniki - zbiory tego iloczynu.

Ta różnica produktów w kategoriach Set, Hilb czy nCob to istota tego, że kategorie nCob i Hilb są bardzo zbliżone strukturalnie ze sobą (obydwie mają iloczyny niekartezjańskie), podczas gdy różnią się zdecydowanie od Set z jego naturalnym iloczynem kartezjańskim. Co więcej, pewne charakterystyczne cechy fizyki kwantowej (splątanie stanów, interferencja, nierówności Bella) są również zakodowane w topologicznej warstwie kategorii nCob. To bardzo ciekawe spostrzeżenie opisane szczegółowo w pracy Baeza [3] skłania do przypuszczenia, że być może, właściwym kierunkiem dla pogodzenia mechaniki kwantowej i OTW jest rezygnacja z nadrzędnej i fundamentalnej roli przypisywanej kategorii zbiorów i funkcji. Prace nad tego typu podejściem do tzw. problemu kwantowej grawitacji, intensywnie się rozwijają.

## Hermitowska struktura

Z A.1 izomorfizm  $Z(\Sigma^*) = Z(\Sigma)^* \cong \overline{Z(\Sigma)}$  gdzie  $\overline{Z(\Sigma)}$  oznacza przestrzeń wektorową  $Z(\Sigma)$  ze sprzężeniem zespolonym. W przypadku tym moglibyśmy dodać jeszcze jeden aksjomat o treści:

A.7 Dla każdej n-wymiarowej rozmaitości  $M$ , wektor  $Z(M) \in Z(\partial M)$  spełnia  

$$Z(M^*) = \overline{Z(M)}$$

Jeżeli  $\partial M = \Sigma_1^* \cup \Sigma_2$  oraz  $Z(M): Z(\Sigma_1) \rightarrow Z(\Sigma_2)$  jest liniowym odwzorowaniem wtedy aksjomat A.7 łączy zmianę orientacji rozmaitości  $M$  (przyporządkowanej czasoprzestrzeni) z hermitowskim sprzężeniem  $Z(M^*) = \overline{Z(M)}$ .

Hermitowskie TQFT to takie topologiczne teorie pola, dla których zachodzi warunek  $Z(M^*) = \overline{Z(M)}$ , gdzie  $M^*$  traktujemy jako zmianę orientacji rozmaitości  $M$ .  $Z(M)$  jest tutaj traktowany jako operator liniowy z przestrzeni Hilberta  $Z(\Sigma_1)$  do  $Z(\Sigma_2)$ , więc  $\overline{Z(M)}$  oznacza operator sprzężony hermitowsko. Oznacza to w szczególności, że topologiczne niezmienniki  $Z(M)$  rozmaitości zamkniętej  $M$  zmieniają się na ich sprzężenie przy zamianie orientacji  $M$ .

Często mówi się, że teorie TQFT są unitarne, tzn. takie gdzie amplituda z procesu odwróconego w czasie jest sprzężeniem zespolonym amplitudy oryginalnego procesu. Jeśli przyjmiemy, że teoria jest hermitowska, możemy zdefiniować morfizm  $f: x \rightarrow y$  jako unitarny jeśli spełnia  $f^\dagger f = 1_x$ , oraz  $ff^\dagger = 1_y$ . Wszystkie interesujące z fizycznego punktu widzenia TQFT powinny posiadać tę własność.

### 2.2.2 Interpretacja fizyczna

Jak pokazaliśmy  $Z$  jest pewnym *funktorem* tj.  $Z(MN) = Z(M)Z(N)$  oraz  $Z(M \times I) = id$ . Łatwo to zilustrować przez odwołanie się do ewolucji czasowej. Przemieszczanie się w czasie wzdłuż kobordyzmu  $N$  a następnie wzdłuż kobordyzmu  $M$  jest równoważna przemieszczeniu się wzdłuż złożenia tych kobordyzmów  $MN$ . Jednak należy pamiętać, że podróż w której nie ma zmian topologicznych nie jest opisywalna w naszej topologicznej teorii. Aby się o tym przekonać jako przestrzeń wektorową  $Z(\Sigma)$  w definicji Atiyah'a zastąpmy przestrzenią Hilberta z kategorii  $Hilb$  i przyporządkujmy ją  $(n-1)$ -rozmaitości  $\Sigma$  (tak jak powyżej). W przypadku tym endomorfizm  $Z(\Sigma \times I)$  z  $Z(\Sigma)$  do  $Z(\Sigma)$  można utożsamiać z operatorem ewolucji w "czasie"  $e^{-TH}$  (gdzie  $T$  jest długością przedziału  $I$ ). Jednakże z aksjomatu A.6, możemy wnioskować, że  $H = 0$ . Widzimy że, TQFT nie opisują aspektów dynamicznych teorii. Zatem stany kwantowe tej teorii nie są dynamicznie generowane. Czyli, wszystkie stany są stanami podstawowymi (stanami próżni), co odzwierciedla się także w skończonym wymiarze przestrzeni Hilberta  $Z(\Sigma)$ . Istotą TQFT jest brak lokalnych stopni swobody. Istotne są tutaj przypadki propagacji przez nietrywialne kobordyzmy zmieniające topologię  $\Sigma$ . Relatywistyczna niezmienniczość teorii oznacza m.in., że współrzędna czasowa nie jest wyróżniona i nie można wybrać jej kanonicznie na stałe. Podobnie w TQFT wybór współrzędnej czasowej dokonuje się na wszystkie możliwe sposoby, więc żaden z nich nie jest wyróżniony. Topologiczne niezmienniki  $Z(M)$  są niezależne od czasu (ustalonego przez wybór  $M$  i  $\Sigma$ ).

Przestrzeń stanów dwóch nieoddziaływujących układów jest dana, analogicznie jak w mechanice kwantowej, przez iloczyn tensorowy przestrzeni Hilberta stanów każdego układu z osobna (przestrzenie Hilberta odpowiadają rozłącznym  $(n-1)$  rozmaitościom).

Statystykę stanów bozonowych otrzymamy jeżeli przy zamianie dwóch stanów  $\phi, \psi$  zachodzi następujący warunek symetrii:

$$\phi \otimes \psi \rightarrow \psi \otimes \phi \quad (2.22)$$

Możemy też rozpatrywać przypadek fermionów, oznacza to jednak, że zamieniamy przestrzeń wektorową  $V$  na przestrzeń wektorową z gradacją  $grVec$ , tzn.  $V = \bigoplus_n V_n$ . W przypadku tym otrzymujemy:

$$\phi \otimes \psi \rightarrow (-1)^{pq} \psi \otimes \phi \quad (2.23)$$

gdzie  $deg(\phi) = p$ , natomiast  $deg(\psi) = q$ . TQFT w przypadku fermionów rozumiemy jako  $Z: nCob \rightarrow grVec$ .

Ciekawą rzeczą jest, że możemy otrzymać bardziej egzotyczne statystyki np. anionów, gdzie wystarczy rozważyć TQFT  $Z: TubeCob \rightarrow Vec_q$  (gdzie liczba  $q$  jest pewnym parametrem) spełniające:

$$\phi \otimes \psi \rightarrow e^{2\pi i q} \psi \otimes \phi \quad (2.24)$$

W następnym rozdziale przedstawię przykład topologicznej teorii Yanga - Millsa w 3-ch wymiarach, której obserwabla topologiczne są niezmiennikami węzłów i splotów zanurzonych w 3-rozmaitościach. Przedstawię również pewne uwagi dotyczące 4-ro wymiarowego przypadku topologicznej teorii, której funkcje korelacji są tzw. wielomianami Donaldsona odkrytymi w topologii w latach 80-tych XX wieku.

## Rozdział 3

# Przykłady TQFT w 3-ch i 4-ch wymiarach

### 3.1 Teoria Cherna–Simonsa a niezmienniki węzłów

W rozdziale tym opiszemy bardzo ważny przykład TQFT w trzech wymiarach. Teoria z symetrią cechowania, której działanie wyraża się przez formy Cherna–Simonsa, jest teorią topologiczną (1.148):

$$S_{CS}(A) = \int_M \text{tr}(A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A) \quad (3.1)$$

Związki pomiędzy niezmiennikami węzłów w  $R^3$  (również w  $S^3$ ) i teorią Cherna–Simonsa na płaskiej przestrzeni euklidesowej jako pierwszy podał Witten w swojej pracy z 1989 roku [12]. W pracy tej pojawiło się uogólnienie teorii Cherna–Simonsa na „dowolne” 3-wymiarowe zwarte rozmaitości i związek z niezmiennikami węzłów i splotów zanurzonych w tych rozmaitościach. W ten sposób Witten otrzymał funktor z kategorii 3-kobordyzmów do kategorii Hilb, czyli 3-wymiarową TQFT.

W ujęciu całek po trajektoriach Feynmana w mechanice kwantowej amplitudy przejścia możemy wyrazić jako całki po całej przestrzeni możliwych „dróg”, używając do tego pewnej miary funkcjonalnej na tej przestrzeni, która zwykle nie daje się rygorystycznie zdefiniować jako miara Lebesgue’a:

$$e^{\frac{i}{\hbar}S(\gamma)} D_\gamma \quad (3.2)$$

gdzie  $S$  to pewne działanie klasyczne a  $D_\gamma$  miara funkcjonalna na przestrzeni dróg.

Rozważmy teorię YM z wiązką  $E$  jako  $G$ -wiązką nad zorientowaną Riemmanowską rozmaitością  $M$ . Jeżeli przez  $A$  oznaczmy koneksję wiązki  $E$  wtedy działanie YM możemy zapisać jako (1.67)

$$S_{YM}(A) = \frac{1}{2} \int_M \text{tr}(F \wedge *F). \quad (3.3)$$

Wartość oczekiwaną próżni obserwabli  $f$  wyznaczamy analogicznie jak w (2.1):

$$\langle f \rangle = \frac{1}{Z} \int_{\mathcal{A}} f(A) e^{\frac{1}{\hbar} S_{YM}(A)} \mathcal{D}A \quad (3.4)$$

gdzie  $\mathcal{D}A$  jest miarą funkcjonalną na  $\mathcal{A}$ , a stała normalizacyjna  $Z$ :

$$Z = \int_{\mathcal{A}} e^{\frac{1}{\hbar} S_{YM}(A)} \mathcal{D}A \quad (3.5)$$

jest **funkcją rozkładu** (2.6).

Ponieważ obserwabli w teoriach gauge, w formalizmie całek po trajektoriach są gauge niezmienniczymi funkcjami na  $\mathcal{A}$ , formalizm całek po trajektoriach może być zastosowany do każdej teorii pola dla której jest określona funkcja Lagranża.

Obserwabliami (gauge niezmienniczymi) w teoriach z cechowaniem są np. **pętle Wilsona**. Pętla Wilsona  $W(\gamma, A)$  jest śladem tzw. holonomii koneksji mającej potencjał wektorowy  $A$ , wzdłuż krzywej  $\gamma$ . Co oznacza, że możemy pętlę Wilsona interpretować jako funkcję na  $\mathcal{A}$ .

Wartość oczekiwana próżni pętli Wilsona jest dana formalnie jako

$$\langle W(\gamma, A) \rangle = \frac{1}{Z} \int_{\mathcal{A}} W(\gamma, A) e^{\frac{1}{\hbar} S_{YM}(A)} \mathcal{D}A \quad (3.6)$$

Ponieważ teorie YM zależą od metryki (poprzez operator Hodge'a) na rozmaitości  $M$ , wartość oczekiwana próżni pętli Wilsona zależy będzie nie tylko od topologii pętli, ale również od jej geometrii. Historycznie pętle Wilsona zostały wprowadzone przez K. Wilsona w roku 1974 w pracach dotyczących opisu uwięzienia kwarków (ang. quark confinement).

Jeśli natomiast użyjemy działania Cherna–Simonsa, to, w zasadzie, powinniśmy otrzymać wartości oczekiwane próżni pętli Wilsona, niezależne od metryki. Oczywiście musimy dodatkowo przyjąć odpowiednią gauge niezmienniczość i dyfeomorficzną niezmienniczość miary funkcjonalnej. Takie topologiczne wielkości powinny charakteryzować węzły, czyli pętle  $\gamma$  w  $R^3$ .

Jeśli dodatkowo udałoby się rozszerzyć teorię z działaniem Cherna–Simonsa na inne niż  $R^3$  ( $S^3$ ) rozmaitości, to można by się pokusić o liczenie takim sposobem niezmienników topologicznych węzłów w tych 3-rozmaitościach.

Okazuje się, że faktycznie jest to możliwe. Jeśli weźmiemy więcej niż jedną pętlę Wilsona w teorii Cherna–Simonsa i policzymy wartość oczekiwaną próżni ich iloczynu, to moglibyśmy otrzymać teorio-polową konstrukcję niezmienników linków w 3-rozmaitościach innych niż  $R^3$ .

Przyjrzyjmy się trochę dokładniej temu przedsięwzięciu (ale wciąż bez przedstawiania szczegółowej konstrukcji, która jest nietrywialna i trudna).

Warto przypomnieć, że linkiem  $L$  (splotem) na 3-rozmaitości  $S$  nazywamy zanurzenie dyfeomorficzne pewnego zbioru rozłącznych, ale być może splecionych i zawężonych, okręgów.

Dwa linki  $L$  i  $L'$  nazywamy podobnymi izotopijnie jeżeli istnieje jedno parametrowa rodzina dyfeomorfizmów  $\alpha_1$  odwzorowująca  $L$  do  $L'$ .  $R^3$  nie jest zwartą rozmaitością, jednakże te same niezmienniki linków otrzymamy, gdy zamienimy  $R^3$  na  $S^3$  poprzez dodanie punktu w nieskończoności.

Niech  $S$  będzie zwartą, zorientowaną 3-wymiarową rozmaitością. Natomiast niech  $E$  będzie trywialną  $G$ -wiązką nad rozmaitością  $S$ , ze standardowym włóknem będącym przestrzenią wektorową  $V$ , na której grupa  $G$  ma swoją reprezentację  $\rho$ . Przez  $\mathcal{A}$  oznaczmy przestrzeń wszystkich  $G$ -koneksji na wiązce  $E$ . Jako że  $E$  jest trywialną wiązką, możemy zapisać koneksję jako sumę koneksji płaskiej oraz pewnego potencjału wektorowego (1.30), dzięki czemu możemy traktować koneksję jako potencjał wektorowy. Działanie Cherna–Simonsa jest niezmiennicze przy działaniu dyfeomorfizmów zachowujących orientację, oraz gauge niezmiennicze ze względu na  $G$ -transformacje cechowania. Prowadzi to do wniosku, że

$$e^{\frac{ik}{4\pi} S_{CS}(A)} \quad (3.7)$$

(gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą zwaną **poziomem**), jest niezmiennicze ze względu na transformacje cechowania. Dzięki czemu możemy użyć tej wielkości (3.7) w formalizmie całek po trajektoriach dla teorii Cherna–Simonsa, analogicznie jak

$$e^{\frac{1}{\hbar} S_{YM}} \quad (3.8)$$

w teoriach YM.

Przypuśćmy, że  $L$  jest zorientowanym linkiem, którego składniki dane są przez pętle  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ . Wartość oczekiwana próżni  $\langle W(\gamma_1) \dots W(\gamma_n) \rangle$  możemy zapisać z (3.6) jako:

$$\frac{1}{Z(S)} \int_{\mathcal{A}} W(\gamma_1, A) \dots W(\gamma_n, A) e^{\frac{ik}{4\pi} S_{CS}(A)} \quad (3.9)$$

gdzie

$$Z(S) = \int_{\mathcal{A}} e^{\frac{ik}{4\pi} S_{CS}(A)} \mathcal{D}A \quad (3.10)$$

Oczywiście, musimy dokonać pewnych założeń odnośnie miary  $\mathcal{D}A$ . Jeżeli założymy, że  $\mathcal{D}A$  jest dyfeomorficznie niezmiennicza, wtedy wartość oczekiwana próżni będzie niezmiennicza względem wszystkich zachowujących orientację dyfeomorfizmów rozmaitości  $S$ . W tym przypadku wartość ta będzie również niezmiennikiem linku  $L$  z dokładnością do relacji izotopii.

Okazuje się, że można w ten sposób otrzymać znane matematykom od lat 80-tych XX wieku wielomiany Jonesa będące właśnie niezmiennikami topologicznymi linków. Wielomiany Jonesa były uzyskane nowatorską techniką algebraiczną przez odwołanie się do tzw. algebr Hopfa.

Szczegóły tego przedsięwzięcia są przedstawione w pracy Wittena [12]. Równocześnie taka topologiczna teoria jest realizacją jako funkcji korelacji w pewnej teorii Yanga–Millsa właśnie wielomianów Jonesa. To jest właśnie rozwiązanie problemu postawionego przed fizykami (teoretykami) przez matematyka Atiyah'a.

## 3.2 Topologiczny "TWIST" w supersymetrycznych teoriach Yanga – Millsa

Wielomiany Donaldsona to pewne wyrażenia wielomianowe określone na zwartych (jednospójnych) 4-rozmaitościach gładkich, takie, że pełnią rolę niezmienników występujących tu gładkich struktur. Oznacza to, że za pomocą tych wielomianów chcielibyśmy móc odróżnić jedną strukturę gładką rozmaitości od innej. W wymiarze 4, rozmaitości zwarte mogą mieć wiele nierównoważnych struktur gładkich określonych dla tej samej topologii. Do czasów pracy Donaldsona z 1982 roku, matematycy nie znali sposobu odróżniania takich struktur, a nawet nie wiedzieli, w wielu przypadkach, że istnieją. Chodzi tu o praktyczną stronę klasyfikacji zwartych, jednospójnych oraz gładkich 4-rozmaitości bez brzegu. Prosty przykładem niezmienników topologicznych są tzw. formy przecięć, liczące ilość przecięć powierzchni zanurzonych w rozmaitości i będących w tzw. ogólnym położeniu. Inny przykład, to pojawiające się w tej pracy niezmienniki Eulera (4.47), czy funkcje rozkładu w TQFT (2.6). Są to jednak bardzo nieprecyzyjne niezmienniki. Odróżniają w zasadzie tylko różne rozmaitości topologiczne. Wielkim przełomem w tej dziedzinie była właśnie praca Donaldsona. Po raz pierwszy udało się zrozumieć związek istnienia różnych gładkich struktur na 4-rozmaitościach i pewnych rodzajów form przecięć. Mianowicie, forma przecięć jest reprezentowana pewną macierzą o wyrazach całkowitych. Donaldson pokazał, m.in., że jeśli 4-ro rozmaitość jednospójna i zwarta jest gładka, to macierz formy przecięć (jeśli jest dodatnio określona) musi być diagonalizowalna przez składanie z innymi macierzami o wyrazach całkowitych. Mówimy, że forma przecięć jest diagonalizowalna nad liczbami całkowitymi. Wielomiany Donaldsona odróżniają wiele różnych struktur gładkich. Ich konstrukcja to kolejny „nietrywialny” wynik teorii Donaldsona.

Przenikanie się idei matematycznych i fizycznych jest niezwykle istotnym czynnikiem rozwoju obu tych dziedzin. Prace Donaldsona to dobry przykład takich zależności. Rozwiązano bardzo trudny, czysto matematyczny problem (częściowej) klasyfikacji 4-ro rozmaitości gładkich i zwartych (medal Fieldsa), ale metody zastosowane przez Donaldsona to aparat „fizycznych” teorii Yanga–Millsa i rozwiązań instantonowych (ale na rozmaitościach Riemanna).

Naturalne wydaje się w tym kontekście pytanie Atiyah’a o ewentualną realizację tych wielomianów przez jakąś teorię pola jako funkcji korelacji tej teorii tj. wartości oczekiwane próżni pewnych obserwabli tej teorii. Wiemy już, że Witten pokazał, że faktycznie taka teoria z lokalną symetrią cechowania istnieje.

Dokładny opis tej teorii i sposób pojawiania się wielomianów Donaldsona wykracza obecnie poza umiejętności autora, ale jest to przypadek bardzo ważny dla prezentowanej pracy.

Istotną cechą konstrukcji odpowiedniej teorii YM jest supersymetria. Należy zacząć od supersymetrycznej teorii YM z grupą gauge  $SU(2)$  i z tzw. dwoma generatorami supersymetrii, piszemy  $\mathcal{N} = 2$ . Taka teoria nie jest topologiczna i jest zapisana na płaskiej przestrzeni Minkowskiego. Następnie przeformułujemy tę teorię na płaskiej 4-przestrzeni Riemanna, czyli na  $R^4$ .



Żeby można było zapisać ją na innych 4-rozmaitościach, już niekoniecznie płaskich, i dla metryk euklideowych, Witten dokonał tzw. twistu topologicznego. Zabieg ten ma wpływ na pola i obserwable teorii. Zmianie uległ też lagranżjan teorii. Otrzymane obserwable tej nowej teorii (a właściwie ich wartości oczekiwane próżni-VEV) już nie zależą od metryki (wariacja ich VEV po metryce znika). Witten pokazał, że są to dokładnie wielomiany Donaldsona rozmaitości na których ta zmodyfikowana teoria jest sformułowana. W ten sposób otrzymano funktor z kategorii 4-ro kobordyzmów do  $n\text{Hilb}$ , a więc TQFT.

Wiemy, że model standardowy zmusza do wykroczenia poza zaburzeniowy reżim rachunków. Jest to ewidentne w QCD, gdzie przy małych energiach teoria opisuje oddziaływanie dla dużych stałych sprzężenia, zatem perturbacyjne rachunki tracą sens. Co więcej, wyjaśnienie uwięzienia kwarków, dla małych energii, to też efekt związany z tym problemem. Powstaje pytanie, czym właściwie jest kwantowa teoria pola jako teoria opisująca zarówno reżim zaburzeniowy jak i niezaburzeniowy. To kluczowe zagadnienie i jak dotąd nie ma dobrego wyjaśnienia. Podobne pytanie jest niezwykle istotne w teorii (super)strun. I właśnie wyjaśnienie (przynajmniej częściowe) tego problemu uzyskano dzięki liczeniu topologicznych niezmienników Donaldsona 4-rozmaitości metodami teorii pola. Wkracza tu idea dualności w fizyce i matematyce.

Z ideą dualności spotkaliśmy się już tak naprawdę w pierwszym rozdziale, przy opisie monopola Diraca. Mianowicie łatwo przekonać się, że próżniowe równania Maxwella (1.80) nie zmieniają się jeżeli dokonamy przekształcenia  $F \rightarrow *F$ . Przekształcenie to w jawnej postaci odpowiada następującej symetrii:  $E \rightarrow B$  oraz  $B \rightarrow -E$ . Dodatkowo symetria ta jest zachowana jeżeli wprowadzimy, (tak jak Dirac) ładunek magnetyczny  $q_m$ . Z rozważań dotyczących monopola Diraca otrzymaliśmy warunek (1.126)  $q_m q_e = \frac{1}{2} n \hbar c$  (gdzie  $n$  jest liczbą całkowitą). Dualność w tym przypadku polega po prostu na wymianie  $q_e$  na  $q_m$  (dokładniej  $q_e$  oraz  $\frac{n \hbar c}{2 q_e}$ ). Ładunek elektryczny  $q_e$  jest stałą sprzężenia. Dzięki dualnością mielibyśmy możliwość dowiedzieć się więcej na temat fizyki z silną stałą sprzężenia korzystając z dualnego sformułowania teorii ze słabą stałą sprzężenia.

Witten pokazał, że niezmienniki Donaldsona (zwykle trudne do policzenia) można w sposób dualny (i dużo łatwiej) policzyć jako funkcje korelacji pewnej, już abelowej tj. z grupą  $U(1)$ , teorii YM. To właśnie jest „monopolowa”  $U(1)$  teoria YM dualna do teorii Donaldsona-Wittena z grupą  $SU(2)$ . Co więcej, dualność tych teorii polega na tym, że duża stała sprzężenia jednej teorii odpowiada dualnie małej stałej sprzężenia drugiej. Zatem, tu gdzie kończy się możliwość rachunków zaburzeniowych jednej teorii, można dualnie te rachunki wykonać w drugiej. Istotą tej procedury jest topologiczna niezmienniczość (a więc też supersymetria) i istnienie pewnych instantonowych niezmienniczych stanów (tzw. stanów BPS). Taki zabieg pozwala zrozumieć fenomenologiczne aspekty QCD uzyskane analitycznie na gruncie teorii z supersymetrią. To również klucz do zrozumienia niezaburzeniowych aspektów teorii superstrun. Procedura ta pozwala wyznaczyć zupełnie nową klasę niezmienników gładkich 4-ro rozmaitości, tzw. niezmienników Seiberga-Wittena.

## Zakończenie

Praca przedstawia dyskusję pewnych geometrycznych i topologicznych metod obecnych we współczesnej klasycznej i kwantowej teorii pola. W rozdziale 1 przedstawiłem klasyczne teorie Yanga–Millsa (bez tzw. pól materii i opisujące tylko pola bezmasowe), w języku wiązek włóknistych i koneksji na wiązkach. To naturalny język geometryczny wszystkich teorii z cechowaniem opisujących dynamikę pól - nośników oddziaływań. Następnie, rozszerzając ten formalizm o pola materii i zakładając mechanizm Higgsa, otrzymałem geometrycznie jednolite sformułowanie wszystkich pól i nośników oddziaływań występujących w Modelu Standardowym cząstek elementarnych. Kluczowym jest tutaj geometryczna konstrukcja tzw.  $G$ -wiązek wektorowych stowarzyszonych z wiązkami głównymi. To właśnie cięcia tych wiązek opisują pola materii ze spinem, czyli pola fermionowe. Takie geometryczne sformułowanie elementów modelu standardowego pozwala w równie naturalny sposób sięgnąć do topologicznych aspektów konstrukcji. Jest to istotne gdy chcemy wyjść poza zaburzeniowy opis zjawisk. Przedstawiłem aspekty teorii gauge z niezależnym od metryki działaniem Cherna–Simonsa (1.104). Opisałem monopol Diraca oraz instantony  $SU(2)$ .

Następny rozdział dotyczy kwantowych aspektów teorii pola przybliżanych z punktu widzenia topologii i geometrii różniczkowalnych z brzegiem, a dokładniej, kategorii kobordyzmów  $n\text{Cob}$ . Pozwala to wyjść poza sformułowanie teorii pola na płaskich różniczkowalnościach tak, że funkcje korelacji tej teorii nie zależą od metryki. To właśnie klasa topologicznych kwantowych teorii pola. Podaję aksjomatyczne sformułowanie TQFT (aksjomaty Atiyah'a). Okazuje się, że kategoriale własności  $n\text{Cob}$  zbliżają ją do kategorii przestrzeni Hilberta  $\text{Hilb}$ , a równocześnie zdecydowanie oddalają od powszechnie uznawanej za podstawową, kategorii zbiorów i funkcji  $\text{Set}$ . Ogólna teoria względności jest formułowana zwykle czysto geometrycznie (różniczkowalne, wiązka stycznia i koneksja Christoffela). Postarałem się ukazać pewną możliwość połączenia OTW z teoriami kwantowymi. I chociaż OTW i mechanika kwantowa posługują się zupełnie różnymi narzędziami matematycznymi (OTW - analiza różniczkowych i dyfeomorfizmy, natomiast teorie kwantów - przestrzenie Hilberta i operatory liniowe) to dzięki użyciu teorii kategorii wskazałem istotne podobieństwa tych, wydawałoby się zupełnie różnych, teorii. Argumentując za Baezem można przypuszczać, że to właśnie przypisywanie wyróżnionej i nadrzędnej roli kategorii zbiorów, może być jedną z (istotnych) przeszkód przy pogodzeniu OTW i mechaniki kwantowej. Poza omówieniem pewnych własności i interpretacji fizycznej samych aksjomatów w rozdziale 3 pokazałem dwa przykłady TQFT. I chociaż dokładne przedstawienie tych teorii przekracza ramy tej pracy (i obecne umiejętności autora), to wskazałem pewne istotne fakty. Pierwsza to topologiczna teoria Cherna–Simonsa, teraz sformułowana na dowolnej zwartej 3-rozmaitości, której VEV pewnych obserwabli są niezmiennikami węzłów i splotów 3-rozmaitości (wielomiany Jonesa). Natomiast drugim przykładem jest teoria Donaldsona–Wittena związana z niezmiennikami Donaldsona 4-ro wymiarowych różniczkowalności. Rozpoznanie roli tych teorii w fizyce i matematyce oraz odkrycie i opisanie dualności Seiberga–Wittena, uważane są obecnie za wielkie (i już klasyczne) osiągnięcia XX wiekowej fizyki matematycznej.

## Rozdział 4

# Uzupełnienia

### 4.1 Formy różniczkowe, teorie Yanga–Millsa, instantony

Klasyczne pola powinny mieć odpowiednie własności transformacyjne względem grupy Poincarego, która jest rozszerzeniem grupy Lorentza  $SO(1,3)$  o translacje. Grupę tę odkryto jako grupę symetrii równań Maxwella. Nakrywająca grupa  $Spin(1,3)$  grupy Lorentza ma reprezentacje zarówno bozonowe jak i fermionowe.

#### Grupa $SU(2)$

Fundamentalną reprezentację grupy  $SU(2)$  tworzą zespolone macierze  $2 \times 2$ , spełniające:

$$U^\dagger U = 1, \quad \det(U) = 1. \quad (4.1)$$

Jest to grupa trójparametrowa, której rozmaitość grupowa odpowiada trójwymiarowej sferze  $S_3$ .

Ogólny element grupy zapisujemy jako :

$$U = e^{i\alpha^a T^a} \quad (4.2)$$

gdzie  $T^a$  to generatory grupy.

Dla grupy  $SU(2)$  istnieją 3 generatory:

$$T^a = \frac{1}{2}\sigma^a \quad (4.3)$$

gdzie  $\sigma^a$  to macierze Pauliego. Generatory są hermitowskie i spełniają:

$$[T^a, T^b] = i\epsilon_{abc}T^c \quad (4.4)$$

oraz

$$\text{tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta_{ab} \quad (4.5)$$

Wybierzmy reprezentację fundamentalną w postaci:

$$\gamma(x) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x^4 - ix^3 & -x^2 - ix^1 \\ x^2 - ix^1 & x^4 + ix^3 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

dla  $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2}$ .

Odwzorowanie (4.6) jest bijekcją ze sfery  $S_3 \in R^4$  o promieniu  $r$  do grupy  $SU(2)$ .

$$\gamma^{-1} = \gamma^\dagger = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x^4 + ix^3 & x^2 + ix^1 \\ -x^2 + ix^1 & x^4 - ix^3 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

$$d\gamma = -\frac{dr}{r}\gamma + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} dx^4 - idx^3 & -dx^2 - idx^1 \\ dx^2 - idx^1 & dx^4 + idx^3 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Definiując układ ortogonalny:

$$(h_j, h_i) = \delta_{ji}, \quad (h_j, h_4) = 0, \quad (h_4, h_4) = 1 \quad (4.9)$$

dla którego:

$$h_j = -\frac{1}{r}(x^j dx^4 - x^4 dx^j + \epsilon_{jkl} x^k dx^l) \quad (4.10)$$

natomiast

$$h_4 = dr = \frac{x^i}{r} dx^i \quad (4.11)$$

możemy zapisać relację:

$$\gamma^{-1} d\gamma = -\frac{2i}{r} h_k T_k \quad (4.12)$$

dotatkowo zachodzą relacje:

$$dh_4 = 0, \quad dh_i = -\frac{1}{r}(h_i \wedge h_4 + \epsilon_{ijk} h_j \wedge h_k) \quad (4.13)$$

$$h_1 \wedge h_2 \wedge h_3 = r^3 d\sigma_3 \quad (4.14)$$

gdzie  $\sigma_3$  to element powierzchni sfery  $S_3$ . Ponieważ baza  $h$  związana jest z obrotem  $O(4)$  więc:

$$h_1 \wedge h_2 \wedge h_3 \wedge h_4 = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4. \quad (4.15)$$

### Formy różniczkowe

Przez 1-formę rozumiemy liniową kombinację wektorów bazowych  $dx^i$ :

$$\omega = \omega_i dx^i \quad (4.16)$$

W przestrzeni form oprócz zwykłego dodawania i mnożenia przez funkcję wprowadzić można antysymetryczny **iloczyn zewnętrzny** (ang. wedge product) :

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i \quad (4.17)$$

gdzie  $dx^i \wedge dx^j$  jest 2-formą.

Z antysymetryczności wynika, że w przestrzeni  $n$ -wymiarowej nie może istnieć forma o rzędzie większym niż  $n$ .

Zbiór form dowolnego stopnia wraz z operatorem “ $\wedge$ ” zdefiniowanym powyżej na pewnej przestrzeni wektorowej  $V$  nazywamy **algebrą zewnętrzną**, lub **algebrą z gradacją** nad przestrzenią  $V$  oznaczaną jako  $\Lambda V$ .

W  $n$ -wymiarowej przestrzeni naturalnie definiujemy formę objętościową w postaci:

$$\omega_n = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (4.18)$$

Operator różniczkowania form (ang. exterior derivative operator)  $d$  w działaniu na  $p$ -formę tworzy nam  $(p+1)$ -formę :

$$d: \Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1} \quad (4.19)$$

Spełnia on następujące własności:

1.

$$d: \Omega^0 \rightarrow \Omega^1 \quad (4.20)$$

2.

$$d(c\omega + \mu) = cd\omega + d\mu; \quad \mu, \omega \in \Omega^p(M), \quad c \in R \quad (4.21)$$

3.

$$d(\omega \wedge \mu) = d\omega \wedge \mu + (-1)^p \omega \wedge d\mu; \quad \omega \in \Omega^p(M), \quad \mu \in \Omega(M) \quad (4.22)$$

4.

$$d(d\omega) = 0. \quad (4.23)$$

Możemy uogólnić pochodną zewnętrzną na przypadek **zewnątrznej pochodnej kowariantnej** (ang. exterior covariant derivative operator).

$d_D$  cięcia  $s$  na wiązce  $E$  jest 1-formą  $d_D s$  o wartościach w  $E$  taką, że:

$$d_D s(v) = D_v s \quad (4.24)$$

gdzie  $v \in \text{Vect}(M)$ . Równanie (4.24) jest uogólnieniem sformułowania:

$$df(v) = v(f) \quad (4.25)$$

W lokalnym układzie współrzędnych  $x^\mu$  na pewnym otwartym zbiorze  $U \subseteq M$  otrzymujemy:

$$d_D s = D_\mu s \otimes dx^\mu \quad (4.26)$$

Uogólnieniem pochodnej zewnętrznej 1-formy

$$d(\omega_I dx^I) = (\partial_\mu \omega_I) dx^\mu \wedge dx^I \quad (4.27)$$

jest

$$d_D(s_I \otimes dx^I) = d_D s_I \wedge dx^I + s_I \otimes d(dx^I) = D_\mu s_I \otimes dx^\mu \wedge dx^I \quad (4.28)$$

Zdefiniujmy operator, który w  $n$ -wymiarowej przestrzeni będzie przeprowadzał  $p$ -formy w  $(n-p)$ -formy, tzw. **operator Hodge'a** (zwany także gwiazdką Hodge'a lub dualizacją formy):

$$*: \Omega^p \rightarrow \Omega^{n-p} \quad (4.29)$$

dla którego spełniona jest równość [1]:

$$\omega \wedge * \mu = \langle \omega, \mu \rangle \text{ vol} \quad (4.30)$$

gdzie  $\langle, \rangle$  to iloczyn skalarny, natomiast  $\text{vol} = \sqrt{|\det g|} d^n x$ .

W ogólności  $p$ -formę możemy zapisać jako:

$$\omega = \frac{1}{p!} \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \quad (4.31)$$

po dualizacji otrzymujemy  $(n-p)$ -formę

$$*\omega = \frac{1}{p!} \epsilon_{j_1 \dots j_{n-p}}^{i_1 \dots i_p} \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{n-p}} \quad (4.32)$$

Kwadrat operatora  $*$  Hodge'a zależy od wyboru sygnatury metryki. Np. dla zorientowanej semi-Riemannowskiej  $n$ -rozmaitości  $M$ , z sygnaturą  $(s, n-s)$ : otrzymujemy:

$$*^2 = (-1)^{p(n-p)+s} \quad (4.33)$$

Mając wiązkę wektorową  $(E, M, \pi)$  na zorientowanej semi-Riemannowskiej rozmaitości bazowej  $M$ , operator Hodge'a działający na formy różniczkowe  $\omega$  o wartościach w  $End(E)$ , jest liniowym operatorem spełniającym:

$$*(T \otimes \omega) = T \otimes *\omega \quad (4.34)$$

gdzie  $T$  jest dowolnym cięciem na  $End(E)$ . Operator  $*$  Hodge'a po prawej stronie równania dotyczy działania na zwykłą formę różniczkową.

Możemy również zdefiniować operator przeprowadzający p-formę w (p-1)-formę, który oznaczamy będziemy  $\delta$ <sup>1</sup> (ang. adjoint exterior derivative operator):

$$\delta: \Omega^p \rightarrow \Omega^{p-1} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \delta\omega_p &= \omega_{p-1} \\ \delta &= (-1)^{np+n+1} * d* \end{aligned} \quad (4.36)$$

gdzie p jest stopniem p-formy  $\omega_p$ , natomiast n jest wymiarem przestrzeni.

Podziałanie operatorem dwukrotnie można zdefiniować jako:

$$\delta^2 = (-1)^n * d^2* = 0 \quad (4.37)$$

Operator Laplace'a  $\Delta$ , który p-formę zamienia w p-formę definiujemy jako:

$$\Delta = (d + \delta)^2 = d\delta + \delta d \quad (4.38)$$

Formy dla których  $\Delta\omega = 0$  nazywamy *harmonicznymi*.

Twierdzenie Hodge'a mówi, że każdą formę różniczkową można globalnie zapisać jako:

$$\omega_n = \Omega_n + d\omega_{n-1} + \delta\omega_{n+1} \quad (4.39)$$

gdzie  $\Omega_n$  jest harmoniczna. Łatwo wywnioskować, że zachodzi:

$$d\omega_n = 0 \Rightarrow \omega_n = \Omega_n + d\omega_{n-1} \quad (4.40)$$

oraz

$$\delta\omega_n = 0 \Rightarrow \omega_n = \Omega_n + \delta\omega_{n+1} \quad (4.41)$$

N-formę  $\omega_n$  nazywamy **zamkniętą** jeśli zachodzi:

$$d\omega_n = 0. \quad (4.42)$$

Natomiast n-formę  $\omega_n$  nazywamy **zupełną** jeśli:

$$\omega_n = d\omega_{n-1}. \quad (4.43)$$

---

<sup>1</sup>Nie należy mylić oznaczenia operatora z oznaczeniem wariacji. Wszędzie tam gdzie to jest konieczne będziemy rozróżniali te dwa oznaczenia

z (4.23) możemy wywnioskować, że **wszystkie zupełne formy są zamknięte**:

$$d(d\omega_{n-1}) = d^2\omega_{n-1} = 0, \quad (4.44)$$

jednakże twierdzenie odwrotne w ogólności nie zachodzi.

Przestrzeń  $Z^k(M)$  k-form zamkniętych zawiera podprzestrzeń  $B^k(M)$  k-form zupełnych. Przestrzenie ilorazowe  $H^k(M) = Z^k(M)/B^k(M)$  nazywa się **grupami kohomologii de Rhama** rozmaitości  $M$ , które są skończonego wymiaru i zależą tylko od topologii rozmaitości  $M$ . Własności:

1) jeśli dwie rozmaitości są homeomorficzne, to ich kohomologie de Rhama są izomorficzne.

2) przestrzeń Minkowskiego jest topologicznie równoważna z  $R^4$ , wszystkie  $H^k(M)$  znikają dla  $k > 0$ , natomiast  $H^0(M) = R$ , co oznacza, że wszystkie formy zamknięte są zupełne z wyjątkiem 0-form. Z grup kohomologii można w ten sposób odtworzyć informację o topologii.

Wymiar  $b_k$  przestrzeni (klas kohomologii)  $H^k(M)$  jest zwany **k-tą liczbą Bettięgo** rozmaitości  $M$ . Jest to liczba niezależnych form harmoniczych rzędu  $k$ . *Klasę kohomologii*  $p$ -formy  $\omega$  nazywamy wszystkie formy postaci  $\omega - d\alpha$ , gdzie  $\alpha$  jest  $(p-1)$ -formą. Formę  $\omega$  nazywamy *kohomologicznie nietrywialną* jeżeli w jej rozkładzie znajduje się forma harmoniczna.

Twierdzenie de Rhama mówi nam, że jeżeli  $\omega$  należy do nietrywialnej klasy kohomologii, to istnieje zamknięta podrozmaitość dla której:

$$\int_{S-\{p\}} \omega \neq 0 \quad (4.45)$$

### Klasy Charakterystyczne

Klasy charakterystyczne to pewne wyrażenia, które pozwalają odróżniać klasy wiązek włóknistych. Klasyfikacja taka dotyczy naturalnych równoważności, np. topologicznych, wiązek. Z fizycznego punktu widzenia klasy charakteryzują konfiguracje pól w sposób topologiczny. Bardziej konkretnie związane są one z ładunkiem magnetycznym i instan-tonowym oraz z rozwiązaniami równań dla pól swobodnych na różnych rozmaitościach.

Przykładem są tutaj klasy całkowite, tzn. takie które w wyniku całkowania dla dowolnej konfiguracji pól scałkowane po dowolnej rozmaitości bez brzegu produkują liczby całkowite i te liczby nie zmieniają się jeśli rozmaitości (czy wiązki) są dyfeomorficzne.

Ważnym dla nas przykładem jest klasa Cherna, którą symbolicznie możemy zapisać jako:

$$c(F) = \det \left( 1 + \frac{i}{2\pi} F \right) = 1 + c_1(F) + c_2(F) + \dots \quad (4.46)$$

Tak jak pokazaliśmy to w rozdziale pierwszym wszystkie formy Cherna  $tr(F^n)$  są zamknięte, oraz niezmiennicze ze względu na transformacje cechowania.



Klasy Cherna scałkowane po rozmaitościach pozwalają otrzymać całkowite liczby Cherna. Przykładami są rozważane przez nas w pierwszym rozdziale ładunek monopola magnetycznego (pierwsza liczba Cherna), oraz ładunek instantonu  $SU(2)$  (równy minus drugiej liczbie Cherna). Klasą Charakterystyczną teorii abelowych jest pierwsza klasa Cherna, ponieważ w teoriach nieabelowych z grupami prostymi ślad wszystkich generatorów jest równy zero.

Klasą charakterystyczną dla grupy  $SU(2n)$ , a zatem dla  $SU(2n)$ -wiązek wektorowych nad  $2n$ -wymiarową rozmaitością, jest **klasa Eulera**, którą możemy wyrazić jako:

$$e_{2n}(R) = \frac{1}{n!(4\pi)^n} \epsilon_{a_1 \dots a_{2n}} R^{a_1 a_2} \wedge \dots \wedge R^{a_{2n-1} a_{2n}} \quad (4.47)$$

Twierdzenie Gaussa-Bonneta

$$\chi(M) = \int_M e_{2n}(M) \quad (4.48)$$

wiąże charakterystykę Eulera  $\chi(M)$   $2n$ -rozmaitości z całką z klasy Eulera po tej rozmaitości.

Bardzo istotnym związkiem łączącym klasę Eulera pewnej  $n = 2k$ -rozmaitości  $M$  z **liczbami Bettiego**, które są wymiarami klas kohomologii (liczba niezależnych form harmoniczych), jest:

$$\chi(M) = \sum_{p=0}^n (-1)^k b_k \quad (4.49)$$

### Tożsamość Bianchiego

Tożsamość Bianchiego posiada wiele form oraz bardzo szerokie zastosowanie. Np. w teorii elektromagnetyzmu postać tożsamości Bianchiego wyraża się przez  $dF = 0$ . Postać ta implikuje zachowanie ładunku, natomiast w OTW wyraża prawo (lokalnego) zachowania tensora energii pędu. O tożsamości Bianchiego można myśleć jako o pewnej formie tożsamości Jacobiego:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad (4.50)$$

dla dowolnych operatorów  $X, Y, Z: V \rightarrow V$  na pewnej przestrzeni wektorowej  $V$ . W ogólności tożsamość Bianchiego dla pól wektorowych  $u, v, w$  na rozmaitości  $M$  możemy zapisać w postaci [1]:

$$[D_u, [D_v, D_w]] + [D_v, [D_w, D_u]] + [D_w, [D_u, D_v]] = 0 \quad (4.51)$$

Dodatkowo jeżeli skorzystamy z faktu, że  $[D_\mu, D_\nu] = F_{\mu\nu}$  możemy uprościć równanie (4.51) do wyrażenia:

$$[D_\mu, F_{\nu\lambda}] + [D_\nu, F_{\lambda\mu}] + [D_\lambda, F_{\mu\nu}] = 0 \quad (4.52)$$

Aby się o tym przekonać skorzystamy z definicji zewnętrznej pochodnej kowariantnej dla form różniczkowych o wartościach w  $End(E)$ , pozwoli ona zapisać nam tożsamość Bianchiego w bardzo prostej formie:

$$d_D F = 0, \quad (4.53)$$

która jest uogólnieniem pierwszej pary równań Maxwella. Aby to uczynić musimy najpierw zdefiniować koneksję  $D$  na  $End(E)$ .

Założmy, że mamy koneksję  $D$  na wektorowej wiązce  $E$  nad rozmaitością  $M$ . Wtedy automatycznie istnieje pewna koneksja  $D^*$  na dualnej wiązce kowektorowej, taka, że dla dowolnego pola wektorowego  $v$  na  $M$  oraz cięć  $s \in \Gamma(E)$ ,  $\lambda \in \Gamma(E^*)$  zachodzi:

$$v(\lambda(s)) = (D_v^* \lambda)(s) + \lambda D_v(s) \quad (4.54)$$

gdzie koneksję  $D^*$  na  $E^*$  definiujemy jako:

$$(D_v^* \lambda)(s) = v(\lambda(s)) - \lambda D_v(s) \quad (4.55)$$

Teraz przypuśćmy, że mamy inną koneksję  $D'$  na pewnej wiązce wektorowej  $E'$  nad  $M$ . Wtedy na wiązce wektorowej  $E \oplus E'$  możemy utworzyć koneksję  $D \oplus D'$ .  $E \oplus E'$  jest wiązką wektorową, której włókno jest sumą prostą przestrzeni wektorowych (włókien)  $E$  i  $E'$ . Koneksja  $D \oplus D'$ , dla pola wektorowego  $v$  oraz cięć  $s \in \Gamma(E)$ ,  $s' \in \Gamma(E')$ , spełnia:

$$(D \oplus D')_v(s, s') = (D_v s, D'_v s'). \quad (4.56)$$

Analogicznie istnieje koneksja  $D \otimes D'$  na  $E \otimes E'$  dla której:

$$(D \otimes D')_v(s \otimes s') = (D_v s) \otimes s' + s \otimes (D'_v s'). \quad (4.57)$$

Ponieważ  $End(E) = E \otimes E^*$  z powyższych rozważań otrzymujemy koneksję na  $End(E)$ , która ma postać:

$$(D_v T)(s) = D_v(Ts) - T(D_v s) \quad (4.58)$$

gdzie  $v$  to dowolne pole wektorowe na rozmaitości  $M$ , natomiast  $T$  jest cięciem na  $End(E)$ , natomiast  $s$  jest cięciem na wiązce  $E$ .

Mając koneksję  $D$  na  $End(E)$  użyjemy jej do zewnętrznej pochodnej kowariantnej  $d_D$  form różniczkowych o wartościach w  $End(E)$ . Spełniać będzie ona wtedy równanie (4.53) czyli tożsamość Bianchiego.

Dodatkowo dla  $p$ -form  $\omega$  o wartościach w  $End(E)$  oraz dla form  $\mu$  o wartościach w  $E$  zachodzi:

$$d_D(\omega \wedge \mu) = d_D \omega \wedge \mu + (-1)^p \omega \wedge d_D \mu \quad (4.59)$$

Rozpiszmy działanie  $d_D^3$  na dowolną formę  $\omega$  o wartościach w  $E$  nad  $M$ .

$$d_D^3 = d_D^2(d_D \omega) = F \wedge d_D \omega \quad (4.60)$$

jednakże

$$d_D^3 = d_D(d_D^2\omega) = d_D(F \wedge \omega) = d_DF \wedge \omega + F \wedge d_D\omega \quad (4.61)$$

porównując powyższe równania widzimy, że dla dowolnej formy  $\omega$  zachodzi równość jeżeli spełniona jest tożsamość Bianchiego  $d_DF = 0$ , co kończy dowód.

Aby przekonać się, że równanie (4.53) jest postacią tożsamości Bianchiego (4.51) wystarczy, że wyrazimy  $d_DF$  w lokalnym układzie współrzędnych. Mianowicie jeżeli  $F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$  wtedy

$$d_DF = \frac{1}{3!}(D_\mu F_{\nu\lambda} + D_\nu F_{\lambda\mu} + D_\lambda F_{\mu\nu}) \otimes dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda \quad (4.62)$$

Warunek (4.53)  $d_DF = 0$  sprowadza się do:

$$D_\mu F_{\nu\lambda} + D_\nu F_{\lambda\mu} + D_\lambda F_{\mu\nu} = 0 \quad (4.63)$$

Postać ta jest równoważna (4.51).

### Definicja śladu na wiązce $End(E)$

Ślad macierzy to suma diagonalnych wyrazów tej macierzy.

Ślad endomorfizmu jest śladem macierzy tego endomorfizmu. Jest on niezmiennikiem i nie zależy od wyboru bazy.

Również wiadomo, że  $End(V) \cong V \otimes V^*$  jest izomorfizmem nie zależnym od wyboru bazy (gdzie  $V$  jest pewną przestrzenią wektorową). Więc ślad możemy zdefiniować jako operację:

$$tr : End(V) \rightarrow R \quad (4.64)$$

taką, że:

$$v \otimes f \rightarrow f(v) \quad (4.65)$$

Aby pokazać, że ta definicja jest śladem niezależnym od wyboru bazy, przyjmijmy, że  $e_i$  tworzy bazę w przestrzeni  $V$ , natomiast  $f^j$  tworzy bazę w przestrzeni  $V^*$

Wtedy dla  $T \in End(V)$ :

$$T = T_j^i e_i \otimes f^j \quad (4.66)$$

natomiast  $tr(T)$  (korzystając z 4.65):

$$tr(T) = T_j^i f^j(e_i) = T_j^i \delta_i^j = T_i^i \quad (4.67)$$

Dla dowolnego cięcia  $T$  wiązki  $End(E)$  możemy zatem zdefiniować  $tr(T)$  jako cięcie  $C$ -wiązki liniowej na bazowej rozmaitości  $M$ , którego wartość w  $p \in M$  jest śladem endomorfizmu  $T(p)$  włókna  $E_p$ :

$$tr(T)(p) = tr(T(p)) \quad (4.68)$$

Więc ślad formy  $\omega$  o wartościach w  $End(E)$

$$tr(T \otimes \omega) = tr(T)\omega \quad (4.69)$$

## 4.2 Podstawowe definicje teorii kategorii

### Kategoria

Kategoria  $C$  składa się z:

- klasy  $Ob(C)$  **obiektów**
- klasy  $hom(x, y)$  **morfizmów** z  $x$  do  $y$  (dowolnej pary obiektów  $x, y$ ) spełniających:<sup>2</sup>

1. dla dowolnego obiektu  $x$  istnieje **morfizm identycznościowy**:

$$1_x: x \rightarrow x \quad (4.70)$$

- dla dowolnego morfizmu  $f: x \rightarrow y$  zachodzi:

$$1_x f = f = f 1_y \quad (4.71)$$

2. dla dowolnej pary morfizmów  $f: x \rightarrow y$  oraz  $g: y \rightarrow z$  istnieje morfizm  $fg: x \rightarrow z$  zwany **złożeniem**  $f$  i  $g$  taki, że:

- składanie dowolnych trzech morfizmów  $f: w \rightarrow x$ ,  $g: x \rightarrow y$ ,  $h: y \rightarrow z$  jest łączne:

$$(fg)h = f(gh) \quad (4.72)$$

**izomorfizmem** nazywamy morfizm  $f: x \rightarrow y$  dla którego istnieje morfizm odwrotny  $g: y \rightarrow x$  spełniający:

$$fg = 1_x \quad gf = 1_y \quad (4.73)$$

### Funktor

Niech  $C$  i  $D$  będą dwoma dowolnymi kategoriami.

Funktor  $F: C \rightarrow D$  składa się z:

- funkcji przeprowadzającej obiekty  $x \in Ob(C)$  w obiekty  $F(x) \in Ob(D)$

$$F: Ob(C) \rightarrow Ob(D) \quad (4.74)$$

oraz,

- funkcji przeprowadzającej każdy morfizm  $f: x \rightarrow y \in Ob(C)$  w morfizm  $F(f): F(x) \rightarrow F(y) \in Ob(D)$

$$F: hom(x, y) \rightarrow hom(F(x), F(y)). \quad (4.75)$$

taki, że:

1. dla dowolnego obiektu  $x \in Ob(C)$ ,  $F(1_x) = 1_{F(x)}$
2. dla dowolnych morfizmów  $f$  i  $g \in Ob(C)$ ,  $F(fg) = F(f)F(g)$

---

<sup>2</sup>zapis  $f: x \rightarrow y$  oznacza, że  $f \in hom(x, y)$

### Transformacja naturalna

Mając dwa funktory  $F, G: C \rightarrow D$  transformacja naturalna  $\alpha: F \Rightarrow G$  składa się z:

- funkcji  $\alpha$  odwzorującej każdy obiekt  $x \in C$  do morfizmu  $\alpha_x: F(x) \rightarrow G(x)$

takie, że dla dowolnego morfizmu  $f: x \rightarrow y \in C$  spełniony jest diagram:

$$\begin{array}{ccc} F(x) & \xrightarrow{F(f)} & F(y) \\ \alpha_x \downarrow & & \downarrow \alpha_y \\ G(x) & \xrightarrow{G(f)} & G(y) \end{array}$$

**Naturalny izomorfizm**  $\alpha: F \Rightarrow G$  to taka naturalna transformacja, która posiada naturalną transformacją odwrotną  $\beta: G \Rightarrow F$  spełniającą:

$$\alpha\beta = 1_F, \quad \beta\alpha = 1_G. \quad (4.76)$$

### Kategoria monoidalna

składa się z:

- Kategorii  $M$
- Funktora zwanego **iloczynem tensorowym**  $\otimes: M \times M \rightarrow M$ , gdzie  $\otimes(x, y) = x \otimes y$  (dla  $x, y \in M$ ), oraz  $\otimes(f, g) = f \otimes g$  (dla morfizmów  $f, g$  w  $M$ ).
- Obiektu  $1 \in M$
- Naturalnego izomorfizmu zwanego **stowarzyszeniem** (ang. associator):

$$a_{x,y,z}: (x \otimes y) \otimes z \rightarrow z \otimes (y \otimes z), \quad (4.77)$$

spełniającego  $l_x: 1 \otimes x \rightarrow x$ , oraz  $r_x: x \otimes 1 \rightarrow x$ .

dla tej kategorii prawdziwe są następujące diagramy:

- 

$$\begin{array}{ccc} & (w \otimes x) \otimes (y \otimes z) & \\ \nearrow^{a_{w \otimes x, y, z}} & & \searrow^{a_{w, x, y \otimes z}} \\ ((w \otimes x) \otimes y) \otimes z & & w \otimes (x \otimes (y \otimes z)) \\ \searrow_{a_{w, x, y} \otimes 1_z} & & \nearrow_{1_w \otimes a_{x, y, z}} \\ (w \otimes (x \otimes y)) \otimes z & \xrightarrow{a_{w, x \otimes y, z}} & w \otimes ((x \otimes y) \otimes z) \end{array}$$

•

$$\begin{array}{ccc}
 (x \otimes 1) \otimes y & \xrightarrow{a_{x,1,y}} & x \otimes (1 \otimes y) \\
 r_x \otimes 1_y \downarrow & & \swarrow 1_x \otimes l_y \\
 x \otimes y & & 
 \end{array}$$

To właśnie w terminach kategorii monoidalnych, z pewną dodatkową strukturą, można opisać funktor z  $\mathbf{nCob}$  do  $\mathbf{Hilb}$ .

# Bibliografia

- [1] John C. Baez, Javier P. Muniain, “*Gauge Theories, Knots, And Gravity*”, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., (1994).
- [2] John C. Baez, “*Higher-Dimensional Algebra and Planck-Scale Physics*”, Cambridge U. Press, (1999).
- [3] John C. Baez, “*Quantum Quandaries: A Category-Theoretic Perspective*”, ph/0404040 v 1, (2004).
- [4] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette, M. Dillard-Bleick, “*Analysis, manifolds and physics*”, North-Holland P. Company, (1977).
- [5] Michael Atiyah, “*The geometry and physics of knots*”, Cambridge U. Press, (1990).
- [6] Hendryk Pfeiffer, “*Quantum general relativity and the classification of smooth manifolds*”, gr-qc/0404088 v2, (2004).
- [7] Kasper Olsen, “*Aspects of Duality*”, PHD Thesis, Niels Bohr Institute U. of Copenhagen, (1999).
- [8] R.J. Lawrence, “*An introduction to topological field theory*”, Proc. Symp. Appl. Math.51 , (1996).
- [9] Lewis H. Ryder, “*Quantum Field Theory*”, Cambridge U. Press, (1996).
- [10] Krzysztof Antoni Meissner, “*Klasyczna teoria pola*”, PWN Warszawa, (2002).
- [11] Stanisław Mikocki, “*Poszukiwanie instantonów w QCD w oddziaływaniach głęboko nieelastycznych na akceleratorze HERA* ”, Raport nr 1943/PH rozprawa habilitacyjna.
- [12] Edward Witten, “*Quantum field theory and the Jones polynomial*”, Comm. Math. Phys, (1989).
- [13] Robert H. Wasserman, “*Tensors and Manifolds with application to mechanics and relativity*”, Oxford University Press, New York (1992).